不静定構造力学演習

——特に撓角法に依る異形ラーメンの解法——

序

このノートは昭和50年頃作製したものである。最近ではパソコンの発達に伴い，部材の伸び縮みを考慮した解法のソフトが販売されている。有限要素法による解析は昔は理論は確立されていたが，当時は大型電算による必要があった。

ここでは従来の部材の伸び縮みを無視した固定法，たわみ角法により不静定構造の解析の方法を特に例題を中心に行うことにした。

中層以下の場合は有限要素法による解析とここに述べる方法とは応力はほゞ一致する。そこで私の会社で現在心配しているのはソフトで計算した値をそのまゝ使用していて，その妥当性ををチェックできないことです。確かにパソコンの発達により高次方程式の解析ができるようになり便利な時代です。しかし，パソコンで得られる数値を検証する力をつけるのも必要だと思います。私のところでは実務計算等にSS3その他のソフトを使用していますが，一般の構造設計にも同じことが言えると思います。

そこで，私が教員時代に講義用に作製したノートを整理してこゝに発表することにしました。

構造を目指す学生，また初技術者の皆様および私共の会社の若い人の勉強になれば幸いです。

最後に手書きのため読みづらいこと，また，電卓により計算しているため，誤字や計算ミスもあるかと思いますがそこには計算の考え方等を大局的に理解していただく事でご了解を願いたいと思います。

目　次

第1章 構造物の判別

1・1 概説

今まで学んできた静定構造物は力の3つの釣り合い式

$\Sigma X=0$，$\Sigma Y=0$，$\Sigma M=0$ から部材の応力及び反力を求める事が出来た。

不静定構造物は力の3つの釣り合い式の他に何等かの釣り合い式を用いなければ求める事は出来ない。

実社会に於ける大部分の構造物は不静定構造物である。

従って不静定構造物の応力解析が出来なければ実社会に於ける構造設計が出来ないと言っても過言ではなかろう。

本章では骨組みの種別について論じ，不静定構造物はどういう骨組みかを理解する。

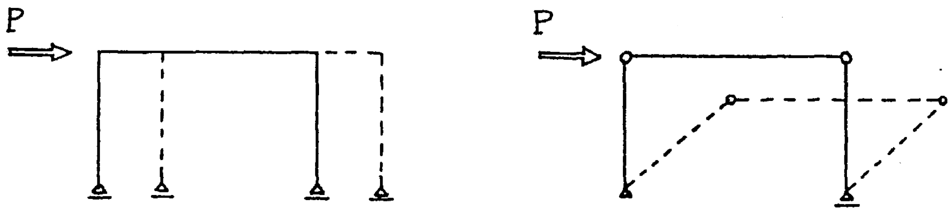
1・2 構造物の種別

構造物は次の様に分類出来る。

- 構造物
  - 不安定構造物
    - 外的不安定構造物
    - 内的不安定構造物
  - 安定構造物
    - 静定構造物
    - 不静定構造物
      - 外的不静定構造物
      - 内的不静定構造物

上記の中で外的とは支持条件（反力）に起因し，内的とは骨組みに起因するものをいう．

不安定構造物 ： 構造物に種々の外力が加わった場合，移動したり倒壊する構造物をいう。（図－1·1）



外的不安定構造物
（a）

内的不安定構造物
（b）

図－1·1

（a）図の場合は構造物としては自立し得るが支持条件が両端共ローラーであるために移動する例である。

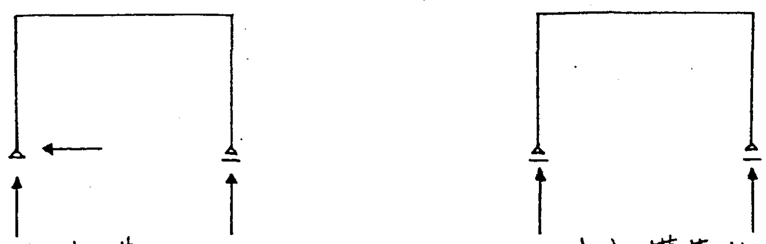
（b）図の場合は接合部が全てピンのために構造物が自立し得ず倒壊する例である。

建築物を安定構造物として設計するのは当然の事である。

安定構造物には静定構造物と不静定構造物があるが，以下それについて述べる。

静定構造物 ： 応力解析上からみると，静定構造物の応力は力の3つの釣り合い式（$\Sigma X=0$，$\Sigma Y=0$，$\Sigma M=0$）から求められる構造物をいう。

構造上からみると，安定構造物から支持条件が一つ変る（反力が一つなくなる）か骨組の一つの部材がなくなればすぐ不安定構造物になってしまう構造物をいう。（図－1·2，1·3）



静定構造物
(a)

不安定構造物
(b)

図ー1・2

静定構造物
(a)

不安定構造物
(b)

図ー1・3

図ー1・2 の (a) 図は静定ラーメンであるが，左側柱脚がローラー（反力が1個減る）になった為に不安定構造物になった例である。

図ー1・3 の (a) 図は静定トラスであるが，斜材が1つなくなった為に不安定構造物になった例である。

以上の事から静定構造物は不安定構造物になりやすい為，構造物はなるべく不静定構造物にすべきである。

不静定構造物は，不静定次数によって何次の不静定構造物かという事で分類される。

不静定次数とは，その構造物からいくつの部材をとれば静定構造物になるか，あるいは反力（支持条件）をいくつ変えれば静定構造物になるかの数の事である。

1・3　構造物の判別式

構造物の判別式についてはいくつかの式が提案されているが，こゝでは斉藤博士の判別式を挙げる。

$$r + s + t - 2k = m \quad \text{--------} \ (1.1)$$

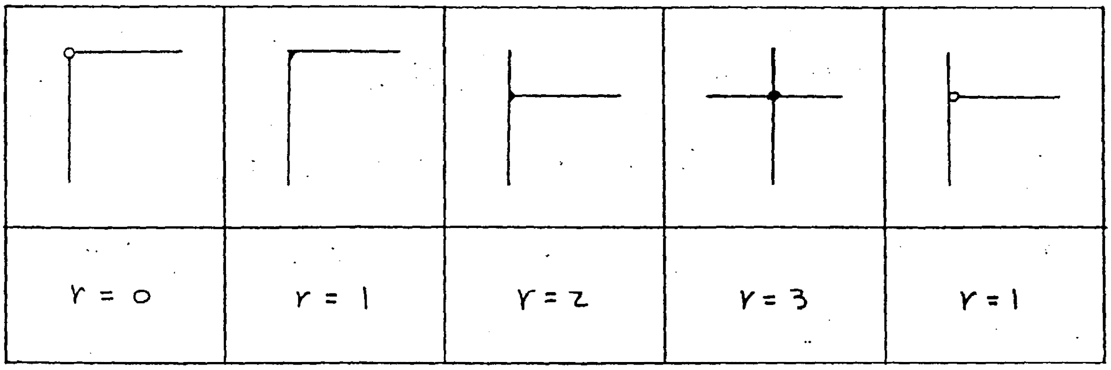
$m = 0$　なる時は静定構造物（この時 m は必要条件であり十分条件ではない）

$m < 0$　なる時は不安定構造物

$m > 0$　なる時は不静定構造物，この時 m を不静定次数という。

r ：剛接数（各接点の剛接部材数 − 1）
s ：部材数
t ：反力数
k ：接点数

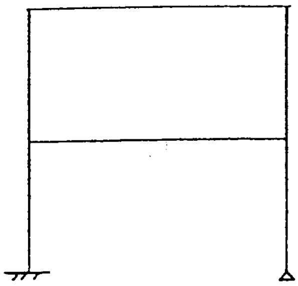
剛接数（r）は1つの部材にいくつの部材が剛接されているかという数の事であり，次の様に数える。



図－1・4　剛接数（r）の数

尚，詳しくは斉藤謙次著「建築構造力学」：理工図書を参照されたい。

（例題 1・1）次の構造物を判別せよ。



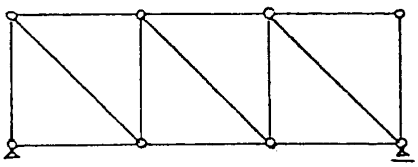
$r = 6$
$s = 6$
$t = 5$
$k = 6$

$r + s + t - 2k$

$= 6 + 6 + 5 - 2 \cdot 6 = 5$

従って5次の不静定構造物である

（例題 1・2）次の構造物を判別せよ。



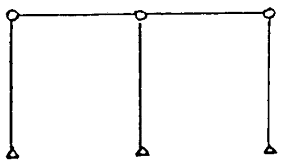
$r = 0$
$s = 13$
$t = 3$
$k = 8$

$r + s + t - 2k$

$= 0 + 13 + 3 - 2 \cdot 8 = 0$

従って静定構造物である

（例題 1・3）次の構造物を判別せよ。



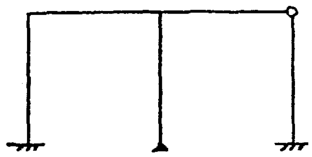
$r = 0$
$s = 5$
$t = 6$
$k = 6$

$r + s + t - 2k$

$= 0 + 5 + 6 - 2 \cdot 6 = -1 < 0$

従って不安定構造物である

（例題 1·4） 次の構造物を判別せよ。



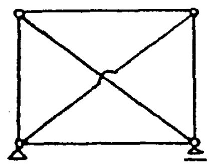
$$\left[\begin{array}{l} r = 3 \\ s = 5 \\ t = 8 \\ k = 6 \end{array}\right.$$

$$r + s + t - 2 \cdot k$$

$$= 3 + 5 + 8 - 2 \cdot 6 = 4$$

従って 4 次の不静定構造物である

（例題 1·5） 次の構造物を判別せよ。



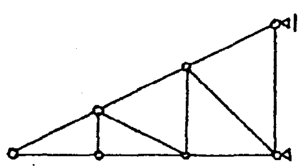
$$\left[\begin{array}{l} r = 0 \\ s = 6 \\ t = 3 \\ k = 4 \end{array}\right.$$

$$r + s + t - 2 \cdot k$$

$$= 0 + 6 + 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

従って 1 次の不静定構造物である

（例題 1·6） 次の構造物を判別せよ。



$$\left[\begin{array}{l} r = 0 \\ s = 11 \\ t = 3 \\ k = 7 \end{array}\right.$$

$$r + s + t - 2 \cdot k$$

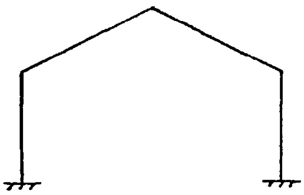
$$= 0 + 11 + 3 - 2 \cdot 7 = 0$$

従って静定構造物である

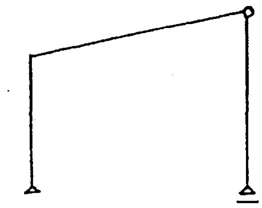
── 練　習　問　題 ──

(問題 1·1) 次の構造物の判別をせよ。

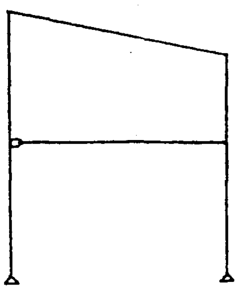
(a)



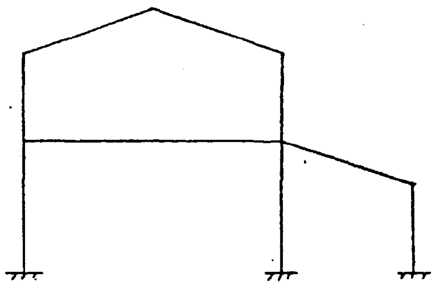
(b)



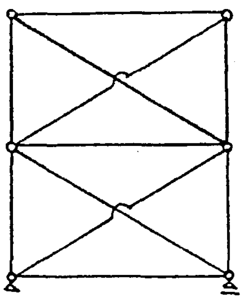
(c)



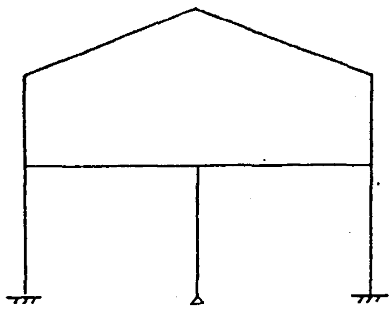
(d)



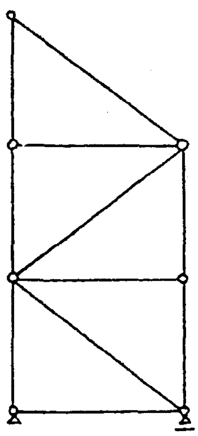
(e)



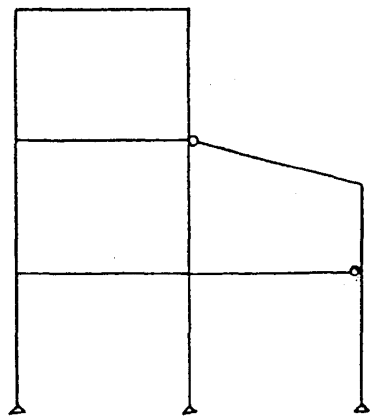
(f)



(g)



(h)



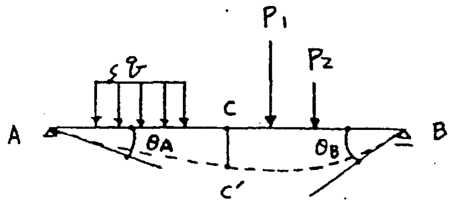
第７章　梁の変形

７・１　概説

不静定構造物の応力解析を行う為には構造物の変形問題を理解しなければならない。

本章では「弾性曲線式」を用いて梁の変形問題を取り扱うものとする。

図－７・１に単純梁に任意の荷重が加わった場合の梁の変形を示す。



図－７・１

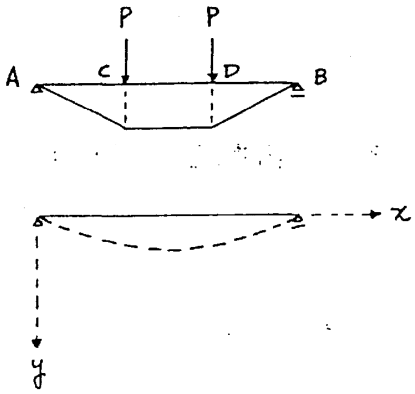
梁に荷重が加わった為に梁は点線の様に変形する。梁の一点CはC'点に移る，その移動量$C-C'$をその点の変位量（たわみ量：δで表わす）という。

また，A点またはB点で材軸の接線がはじめの方向に対してθ_A，θ_Bだけ向きを変えた時，これをその点の「たわみ角」という。

「弾性曲線式」を用いれば静定梁の応力，変形ばかりでなく不静定梁の応力，変形も求める事が出来る。

以下例題を中心に理解する。

2・2　弾性曲線式



図－2・2

図－2・2に示す様に座標軸をとりC－D間の純曲げ状態（曲げモーメントが一定でせん断力が零の状態）からティモシェンコは弾性曲線式を次式で表わしている。

$$E \cdot I \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = q \qquad \text{------} \quad (2 \cdot 1)$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{dM}{dx} = -Q \qquad \text{------} \quad (2 \cdot 2)$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \qquad \text{------} \quad (2 \cdot 3)$$

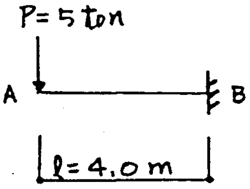
$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int -\frac{M}{EI} dx \qquad \text{------} \quad (2 \cdot 4)$$

$$\delta = y = \iint -\frac{M}{EI} dx \qquad \text{------} \quad (2 \cdot 5)$$

実際の運用としては，任意の点の曲げモーメントを求め，それを一度積分するとたわみ角（θ）が求まり更に積分するとたわみ量（δ）が求まる。

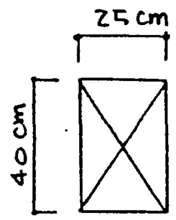
E：ヤング係数
I：断面2次モーメント

（例題2.1）　左図の如き片持梁の先端に集中荷重が加わった時，先端のたわみ（δ_A）とたわみ角（θ_A）を求めよ。



但し梁はコンクリートで下図断面とする。

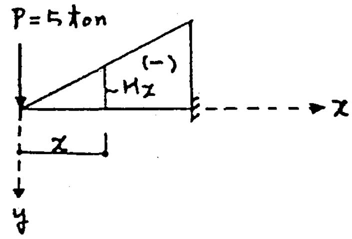
図−2.3 (a)



$E_c = 2.1 \times 10^5$ kg/cm²

図−2.3 (b)

（解）先端（A）点に座標軸をとり（片持梁の時は必ず先端に座標軸をとる），曲げモーメントの一般式を考える。



図−2.3 (c)

$$M_x = -P \cdot x \quad \text{------} \quad (1)$$

（2.3）式に代入する

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = P \cdot x \quad \text{-----} \quad (2)$$

積分して　$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot Px^2 + C_1 \quad \text{------} \quad (3)$$

積分して　$$E \cdot I \cdot y = \frac{1}{6} Px^3 + C_1 x + C_2 \quad \text{------} \quad (4)$$

積分定数 C_1, C_2 を求めるため境界条件を考える。

B点は固定支点であるからたわみ角は0である。

従って　$x = l$　の時　$\theta \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$　の関係を（3）式に代入して

$$C_1 = -\frac{Pl^2}{2} \quad \text{------} \quad (5)$$

B点は固定支点であるからたわみは0である。

従って　$x=l$　の時　$y=0$　の関係を代入して

$$\frac{Pl^3}{6}-\frac{Pl^3}{2}+C_2=0$$

$$C_2=\frac{Pl^3}{3} \quad \text{------ (6)}$$

たわみ角（θ）は（3）式に　C_1　を代入して

$$E\cdot I\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}Px^2-\frac{1}{2}Pl^2 \quad \text{----- (7)}$$

先端のたわみ角は　$x=0$　を（7）式に代入して

$$\theta_A=-\frac{Pl^2}{2EI} \quad \text{----- (8)}$$

たわみ（δ）は（4）式に　C_1, C_2　を代入して

$$E\cdot I\cdot y=\left(\frac{Px^3}{6}-\frac{Pl^2}{2}x+\frac{Pl^3}{3}\right)$$

$$\delta=y=\frac{P}{6EI}\left(x^3-3l^2x+2l^3\right) \quad \text{------ (9)}$$

先端のたわみは（9）式に　$x=0$　を代入して

$$\delta_A=\frac{Pl^3}{3EI} \quad \text{----- (10)}$$

こゝで断面二次モーメントを求めると

$$I=\frac{25\times40^3}{12}=133333.3\ \text{cm}^4$$

（10）式に条件を代入して先端のたわみを求めると

$$\delta_A=\frac{5000\times400^3}{3\times2.1\times10^5\times133333.3}=3.81\ \text{cm}$$

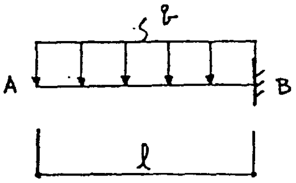
（8）式に条件を代入して先端のたわみ角を求めると

$$\theta_A=-\frac{5000\times400^2}{2\times2.1\times10^5\times133333.3}=-0.014\ \text{Rad}$$

（反時計回り）

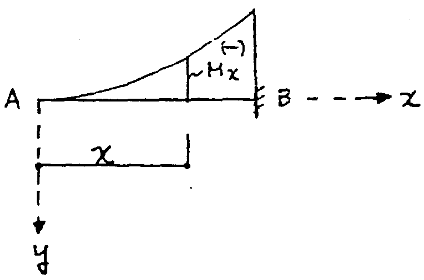
(例題 2・2)　左図の如き片持梁に等分布荷重 (q) が作用する時，A点のたわみを求めよ。

但し，梁の曲げ剛さを EI（一定）とする。



図－2・4 (a)

(解)



図－2・4 (b)

任意点のモーメント M_x を求める

$$M_x = -\frac{q x^2}{2} \quad \text{------} \ (1)$$

(2・3) 式に代入する

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = \frac{q x^2}{2} \quad \text{------} \ (2)$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6} q x^3 + C_1 \quad \text{-------} \ (3)$$

$$E \cdot I \cdot y = \frac{1}{24} q x^4 + C_1 \cdot x + C_2 \quad \text{-------} \ (4)$$

境界条件から積分定数 C_1, C_2 を求める。

$x = l$ の時 $\theta = 0$ であるから，この関係を (3) 式に代入して

$$\frac{q l^3}{6} + C_1 = 0$$

$$C_1 = -\frac{q l^3}{6} \quad \text{------} \ (5)$$

$x = l$ の時 $\delta = 0$ であるから，この関係を (4) 式に代入して

$$\frac{q l^4}{24} - \frac{q l^4}{6} + C_2 = 0$$

$$C_2 = \frac{q l^4}{8} \quad \text{------} \ (6)$$

C_1, C_2 を (4) 式に代入すると弾性曲線式が求まる

$$E \cdot I \cdot y = \frac{1}{24} q \cdot x^4 - \frac{1}{6} q \cdot l^3 \cdot x + \frac{1}{8} q l^4$$

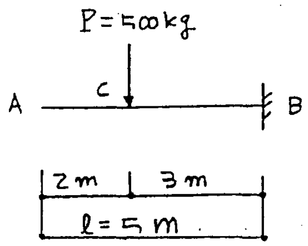
$$y = \frac{q}{24EI} \cdot \left(x^4 - 4 l^3 x + 3 l^4 \right) \quad \text{-----} \ (7)$$

(7) 式に $x=0$ を代入すると δ_A が求まる。

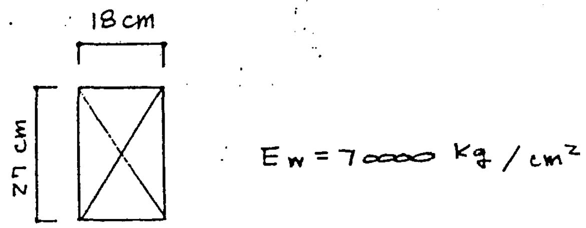
$$\delta_A = \frac{q}{24EI}\cdot 3\ell^4 = \frac{q\ell^4}{8EI} \quad \text{-------} (8)$$

（例題 2・3）　左図の如き片持梁の途中に集中荷重が作用した時，A点のたわみを求めよ。

但し梁は木材で下図断面とする。



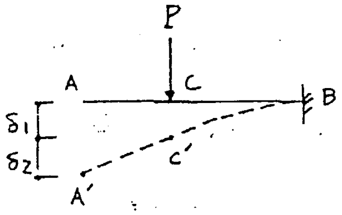
図－2・5 (a)



図－2・5 (b)

（解）　先端集中荷重の公式（例題 2・1）を利用して求める。

A－C間に荷重が作用していないのでその間の材軸の変形は直線的になる。従ってA点とC点のたわみ角は同じ値をとる。



図－2・5 (c)

$$\delta_1 = \frac{P}{3EI}\cdot\left(\frac{3}{5}\ell\right)^3 = \frac{9}{125EI}P\ell^3 \quad \text{------} (1)$$

$$\delta_2 = \frac{2}{5}\ell\tan\theta_c \fallingdotseq \frac{2}{5}\ell\,\theta_c$$

$$= \frac{2}{5}\ell\cdot\frac{P}{2EI}\left(\frac{3}{5}\ell\right)^2$$

$$= \frac{9}{125EI}P\ell^3 \quad \text{------} (2)$$

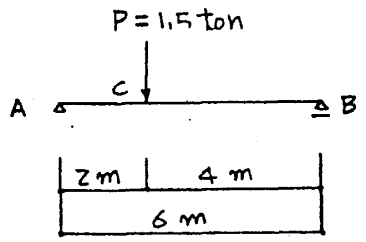
従って　$\delta_A = \delta_1 + \delta_2 = \dfrac{18}{125EI}P\ell^3$ ------ (3)

$$I = \frac{18\times 27^3}{12} = 29524.5\ \mathrm{cm}^4$$

$$\delta_A = \frac{18\times 500\times 500^3}{125\times 70000\times 29524.5} = 4.35\ \mathrm{cm}$$

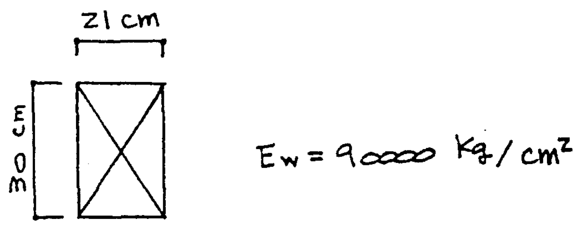
（例題 2・4）

左図の如き単純梁ＡＢのＣ点に集中荷重が作用した時，Ｃ点のたわみを求めよ。



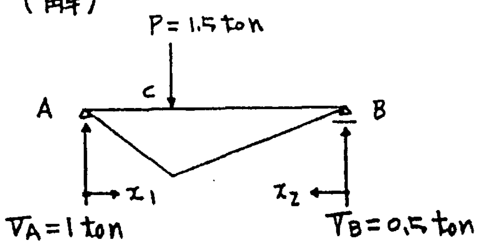
図－2・6（a）

但し梁は木材で下図断面とする。



図－2・5（b）

（解）



図－2・6（c）

曲げモーメント図は左図の様になり，Ｃ点を中心にモーメントの勾配が変るためＡ点からx_1，Ｂ点から左にx_2をとり，Ａ－Ｃ間とＢ－Ｃ間について別々に計算する。

Ａ－Ｃ間について

モーメントの一般式は　$M_{AC}=1\cdot x$

$$E\cdot I\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=-M=-x_1 \quad \text{------ (1)}$$

$$E\cdot I\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}x_1^2+C_1 \quad \text{------ (2)}$$

$$E\cdot I\cdot y=-\frac{1}{6}x_1^3+C_1x_1+C_2 \quad \text{------ (3)}$$

Ｂ－Ｃ間について

モーメントの一般式は　$M_{BC}=0.5\cdot x_2$

$$E\cdot I\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=-M=-0.5x_2 \quad \text{------ (4)}$$

$$E\cdot I\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{4}x_2^2+C_3 \quad \text{------ (5)}$$

$$E \cdot I \cdot y = -\frac{1}{12}x_2^3 + C_3 x_2 + C_4 \qquad \text{------} (6)$$

境界条件から積分定数（C_1～C_4）を求める。

支点Aにおいてたわみは生じない。

従って　$x_1 = 0$　の時　$y = 0$　これを（3）式に代入すると

$$C_2 = 0$$

同様にB点に於て　$x_2 = 0$　の時　$y = 0$　これを（6）式に代入すると　$C_4 = 0$

連続条件を考える。　（3）式において　$x_1 = 2\,m$で（6）式において　$x_2 = 4\,m$　の時（すなはちC点）のたわみは等しくなければならない。

$$-\frac{1}{6} \cdot 2^3 + 2C_1 = -\frac{1}{12} \cdot 4^3 + 4C_3$$

$$2C_1 - 4C_3 = -\frac{64}{12} + \frac{8}{6} = -4 \qquad \text{------} (7)$$

更にたわみ角の連続条件を考える。

（2）式において　$x_1 = 2\,m$で（6）式において　$x_2 = 4\,m$　の時（すなはちC点）のたわみ角は等しく符号は反対である。

$$-\frac{1}{2} \cdot 2^2 + C_1 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 - C_3$$

$$C_1 = -C_3 + 6 \qquad \text{------} (8)$$

（7），（8）式を連立に解けば　C_1，C_3　が求まる。

（8）式を（7）式に代入して

$$-2C_3 + 12 - 4C_3 = -4 \qquad -6C_3 = -16$$

$$\therefore \quad C_3 = \frac{8}{3} \qquad \text{-----} (9)$$

(9) を (8) 式に代入すると

$$C_1 = -\frac{8}{3} + 6 = \frac{10}{3} \qquad \text{------ (10)}$$

(3) 式に求めた C_1, C_2 を代入すると

$$y = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}x_1^3 + \frac{10}{3}x_1\right) \qquad \text{------ (11)}$$

今迄求めた式の単位が ton, m であるから条件もその単位で代入する

$$I = \frac{0.21 \times 0.3^3}{12} = 4.725 \times 10^{-4}\ m^4$$

$$E_w = 90 \times 10^4\ t/m^2$$

$$x_1 = 2\ m$$

(11) 式にこれらを代入すると

$$\delta_c = \frac{1}{4.725 \times 90}\left(-\frac{8}{6} + \frac{20}{3}\right)$$

$$= 0.01254\ m$$

$$= 1.254\ cm$$

(例題 2・5)

左図の如く単純梁にモーメントが作用した時、A 点と B 点のたわみ角を求めよ。

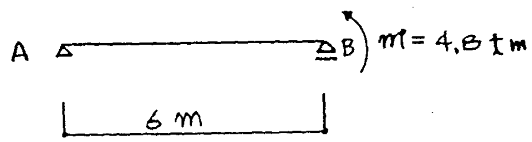


図 − 2・7 (a)

梁断面は鉄骨で H 形鋼とする。

H − 250 × 125 × 6 × 9

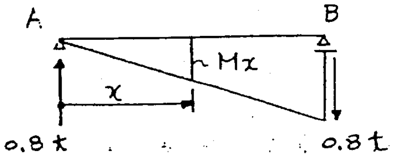
$$I_x = 4050\ cm^4$$

$$E_s = 2.1 \times 10^6\ kg/cm^2$$

(解)

反力は $V_A = -V_B = \frac{m}{l} = 0.8\ \mathrm{ton}$

モーメントの一般式は



図－2・7 (b)

$$M_x = 0.8\,x$$

公式に代入する

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -M = -0.8\,x \quad \text{------ (1)}$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = -0.4\,x^2 + C_1 \quad \text{------ (2)}$$

δ

$EIy = -\frac{2}{15}x^3 + 4.8x$

$$E \cdot I \cdot y = -\frac{2}{15}x^3 + C_1 x + C_2 \quad \text{------ (3)}$$

境界条件から積分定数 C_1, C_2 を求める。

$\delta = \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{15}x^3 + 4.8x\right)$ $\frac{l}{2}$

$x = 0$ の時 $y = 0$ であるからこれを (3) 式に代入して

$$C_2 = 0$$

$x = 6\,\mathrm{m}$ の時 $y = 0$ であるからこれを (3) 式に代入して

$$6\,C_1 = \frac{2}{15} \cdot 6^3 \qquad C_1 = \frac{72}{15} = 4.8$$

(2) 式に積分定数を代入する

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = -0.4\,x^2 + 4.8$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-0.4\,x^2 + 4.8\right) \quad \text{------ (5)}$$

A点のたわみ角は (5) 式に $x=0$ を代入して

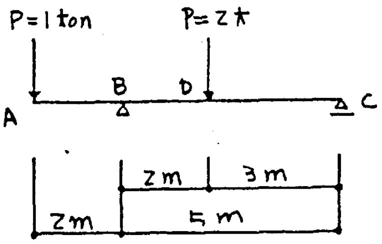
$$\theta_A = \frac{4.8}{EI} = \frac{4.8}{21 \times 10^6 \times 40.5 \times 10^{-6}} = 5.6437 \times 10^{-3}\ \mathrm{Rad}$$

B点のたわみ角は (5) 式に $x = 6\,\mathrm{m}$ を代入して

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\left(-14.4 + 4.8\right) = -\frac{9.6}{EI}$$

$$= -\frac{9.6}{21 \times 40.5} = -11.2874 \times 10^{-3}\ \mathrm{Rad}$$

（例題 2・6）



図－2・8 (a)

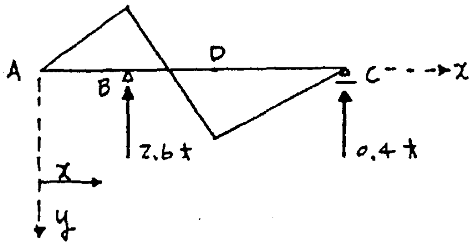
左図の如きはね出し式単純梁のA点及びD点のたわみを求めよ。

尚，梁はH形鋼で

H－200×100×5.5×8　を使用する。

$I = 1840\ cm^4$　　$E_s = 2.1\times10^6\ kg/cm^2$

（解）



図－2・8 (b)

反力を求める。

$\Sigma M_B = 0$ より

$-1\times2 + 2\times2 - 5\cdot V_C = 0$　　$V_C = 0.4\ t$

$\Sigma Y = 0$ より　$V_B = 2.6\ ton$

モーメント勾配が変るからA－B，B－D，C－D間に分けて計算する。

A－B間

$$M_x = -x$$

$$E\cdot I\cdot\frac{d^2y_1}{dx^2} = -M = x \quad \text{-------- (1)}$$

$$E\cdot I\cdot\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \quad \text{------ (2)}$$

$$E\cdot I\cdot y_1 = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2 \quad \text{------ (3)}$$

B－D間

$$M_x = -x + 2.6\cdot(x-2) = 1.6x - 5.2$$

$$E\cdot I\cdot\frac{d^2y_2}{dx^2} = -M = -1.6x + 5.2 \quad \text{------ (4)}$$

$$E\cdot I\cdot\frac{dy_2}{dx} = -0.8x^2 + 5.2x + C_3 \quad \text{------ (5)}$$

$$E\cdot I\cdot y_2 = -\frac{4}{15}x^3 + 2.6x^2 + C_3x + C_4 \quad \text{----- (6)}$$

C − D間

$$M_x = -x + 2.6 \cdot (x-2) - 2 \cdot (x-4)$$

$$= -x + 2.6x - 5.2 - 2x + 8$$

$$= -0.4x + 2.8$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y_3}{dx^2} = -M = 0.4x - 2.8 \quad \text{-------} \ (7)$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dy_3}{dx} = 0.2x^2 - 2.8x + C_5 \quad \text{-------} \ (8)$$

$$E \cdot I \cdot y_3 = \frac{1}{15} x^3 - 1.4x^2 + C_5 x + C_6 \quad \text{------} \ (9)$$

境界条件より積分定数を求める。

$x = 2\,m$（B支点）の時 $y = 0$ であるからこれを(3)式(6)式に代入する。

$$\frac{1}{6} \cdot 2^3 + 2C_1 + C_2 = 0$$

$$2C_1 + C_2 = -\frac{4}{3} \quad \text{------} \ (10)$$

$$-\frac{4}{15} \cdot 2^3 + 2.6 \cdot 2^2 + 2C_3 + C_4 = 0$$

$$2C_3 + C_4 = -\frac{124}{15} \quad \text{-------} \ (11)$$

変形の連続条件からB支点におけるA − B間のB点のたわみ角とB − D間のB点のたわみ角は等しい。

すなわち $x = 2\,m$ の時 $\dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{dy_2}{dx}$ が言える。

$$0.5 \cdot 2^2 + C_1 = -0.8 \cdot 2^2 + 5.2 \cdot 2 + C_3$$

$$C_1 - C_3 = 5.2 \quad \text{-------} \ (12)$$

$x = 4\,m$（D点）において $y_2 = y_3$ であるから(6)式(9)式より

$$-\frac{4}{15} \cdot 4^3 + 2.6 \cdot 4^2 + 4C_3 + C_4 = \frac{1}{15} \cdot 4^3 - 1.4 \cdot 4^2 + 4C_5 + C_6$$

$$4C_3 + C_4 - 4C_5 - C_6 = -\frac{128}{3} \quad \text{------}(13)$$

$x = 4\,m$（D点）において $\dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{dy_3}{dx}$ である。

$$-0.8 \cdot 4^2 + 5.2 \cdot 4 + C_3 = 0.2 \cdot 4^2 - 2.8 \cdot 4 + C_5$$

$$C_3 - C_5 = -16 \quad \text{------}(14)$$

$x = 7\,m$（C点）において $y_3 = 0$ であるから (9) 式にこれを代入する。

$$\frac{1}{15} \cdot 7^3 - 1.4 \cdot 7^2 + 7C_5 + C_6 = 0$$

$$7C_5 + C_6 = \frac{686}{15} \quad \text{------}(15)$$

(10) ～ (15) の連立方程式を解いて $C_1 \sim C_6$ を求める。

(14) 式より $C_3 = C_5 - 16$ これを (11) 式に代入する

$$2C_5 - 32 + C_4 = -\frac{124}{15}$$

$$C_4 = -2C_5 + \frac{356}{15}$$

(13) 式に C_3, C_4, C_6 を代入する

$$4(C_5 - 16) - 2C_5 + \frac{356}{15} - 4C_5 + 7C_5 - \frac{686}{15} = -\frac{128}{3}$$

$$4C_5 - 2C_5 - 4C_5 + 7C_5 = -\frac{128}{3} + 64 - \frac{356}{15} + \frac{686}{15}$$

$$5C_5 = \frac{130}{3} \qquad \therefore\ C_5 = \frac{26}{3}$$

これを (15) 式に代入する

$$7 \times \frac{26}{3} + C_6 = \frac{686}{15} \qquad \therefore\ C_6 = -\frac{224}{15}$$

C_5 を (14) 式に代入して

$$C_3 = -16 + \frac{26}{3} = -\frac{22}{3}$$

これを (12) 式に代入して $C_1 = 5.2 - \dfrac{22}{3} = -\dfrac{6.4}{3}$

C_1を(10)式に代入する。

$$2\times\left(-\frac{6.4}{3}\right)+C_2=-\frac{4}{3} \qquad C_2=\frac{44}{15}$$

$$C_4=-2\times\frac{26}{3}+\frac{356}{15}=\frac{32}{5}$$

A－B間の弾性曲線式

C_1, C_2 を(3)式に代入する。

$$y_1=\frac{1}{EI}\cdot\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{6.4}{3}x+\frac{44}{15}\right) \qquad \text{-----(16)}$$

B－D間の弾性曲線式

C_3, C_4 を(6)式に代入する。

$$y_2=\frac{1}{EI}\cdot\left(-\frac{4}{15}x^3+2.6x^2-\frac{22}{3}x+\frac{32}{5}\right) \qquad \text{------(17)}$$

C－D間の弾性曲線式

C_5, C_6 を(9)式に代入する。

$$y_3=\frac{1}{EI}\cdot\left(-\frac{1}{15}x^3-1.4x^2+\frac{26}{3}x-\frac{224}{15}\right) \qquad \text{-------(18)}$$

A点のたわみは(16)式に $x=0$ を代入して

$$\delta_A=\frac{1}{21\times10^6\times18.4\times10^{-6}}\cdot\frac{44}{15}=6.9\times10^{-3}\,\mathrm{m}=0.69\,\mathrm{cm}$$

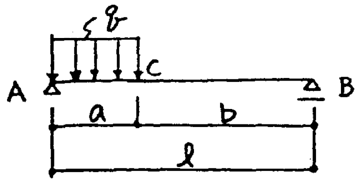
D点のたわみは(17)式に $x=4\,\mathrm{m}$ (あるいは(18)式に $x=4\,\mathrm{m}$)を代入して

$$\delta_D=\frac{1}{21\times18.4}\cdot\left(-\frac{4}{15}\cdot4^3+2.6\cdot4^2-\frac{22}{3}\cdot4+\frac{32}{5}\right)$$

$$=4.64\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$=0.464\,\mathrm{cm}$$

（例題2・7）

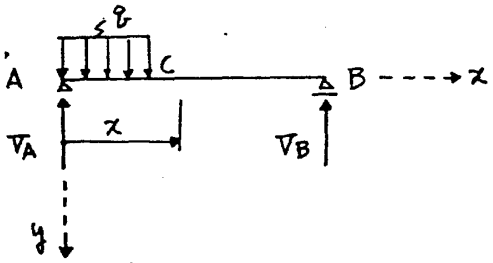


図－2・9 (a)

左図の如き単純梁に等分布荷重が作用した時のたわみ曲線式，曲げモーメント及びせん断力の一般式を求めよ。

但し梁の曲げ剛性EIは一定とする

（解）



図－2・9 (b)

座標を左図の様にとる。

反力を求める。

$\Sigma A = 0$ より

$$q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - V_B \cdot l = 0$$

$$V_B = \frac{qa^2}{2l}$$

$\Sigma Y = 0$ より　$V_A = q \cdot a - \dfrac{qa^2}{2l} = \dfrac{qa}{2l}(2l - a)$

モーメントの一般式は

A－C間　$M_{x_1} = V_A \cdot x - \dfrac{qx^2}{2} = -\dfrac{q}{2}x^2 + \dfrac{qa}{2l}(2l-a)x$

B－C間

$$\begin{aligned} M_{x_2} &= V_A \cdot x - qa\left(x - \frac{a}{2}\right) \\ &= \frac{qa}{2l}(2l-a) \cdot x - qax + \frac{qa^2}{2} \\ &= qax - \frac{qa^2}{2l}x - qax + \frac{qa^2}{2} \\ &= -\frac{qa^2}{2l}x + \frac{qa^2}{2} \end{aligned}$$

A－C間

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2y_1}{dx^2} = -M_{x_1} = \frac{q}{2}x^2 - \frac{qa}{2l}(2l-a) \cdot x \quad \text{------} \ (1)$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dy_1}{dx} = \frac{q}{6}x^3 - \frac{qa}{4l}(2l-a)x^2 + C_1 \quad \text{-----} \ (2)$$

$$E \cdot I \cdot y_1 = \frac{q}{24} \cdot x^4 - \frac{qa}{12l}(2l-a)x^3 + C_1x + C_2 \quad \text{------} \ (3)$$

B－C間

$$E\cdot I\cdot\frac{d^2y_2}{dx^2}=-Mx2=\frac{ga^2}{2l}x-\frac{ga^2}{2} \qquad ------(4)$$

$$E\cdot I\cdot\frac{dy_2}{dx}=\frac{ga^2}{4l}x^2-\frac{ga^2}{2}x+C_3 \qquad -----(5)$$

$$E\cdot I\cdot y_2=\frac{ga^2}{12l}x^3-\frac{ga^2}{4}x^2+C_3x+C_4 \qquad -----(6)$$

境界条件より積分定 $C_1 \sim C_4$ を求める。

$x=0$ の時 $y_1=0$ 従って (3) 式に代入して

$$C_2=0$$

$x=l$ の時 $y_2=0$ 従って (6) 式に代入して

$$C_3\cdot l+C_4=\frac{ga^2l^2}{6} \qquad -----(7)$$

$x=a$ の時 $\frac{dy_1}{dx}=\frac{dy_2}{dx}$ 従って (2), (5) 式より

$$\frac{g}{6}a^3-\frac{ga}{4l}(2l-a)a^2+C_1=\frac{ga^4}{4l}-\frac{ga^3}{2}+C_3$$

$$\frac{ga^3}{6}-\frac{ga^3}{2}+\frac{ga^4}{4l}+C_1-\frac{ga^4}{4l}+\frac{ga^3}{2}-C_3=0$$

$$C_1-C_3=-\frac{ga^3}{6} \qquad -----(8)$$

$x=a$ の時 $y_1=y_2$ 従って (3), (6) 式より

$$\frac{ga^4}{24}-\frac{ga}{12l}(2l-a)\cdot a^3+aC_1=\frac{ga^5}{12l}-\frac{ga^4}{4}+aC_3+C_4$$

$$aC_1-aC_3-C_4=\frac{ga^5}{12l}-\frac{ga^4}{4}-\frac{ga^4}{24}+\frac{ga^4}{6}-\frac{ga^5}{12l}=-\frac{1}{8}ga^4$$

$$C_1-C_3-\frac{C_4}{a}=-\frac{ga^3}{8} \qquad ------(9)$$

連立に解く

(8) 式を (9) 式に代入する

$$-\frac{ga^3}{6}-\frac{C_4}{a}=-\frac{ga^3}{8}$$

$$C_4=-\frac{ga^4}{6}+\frac{ga^4}{8}=-\frac{ga^4}{24}$$

C_4 を (7) 式に代入する

$$C_3\cdot l-\frac{ga^4}{24}=\frac{ga^2l^2}{6} \qquad C_3=\frac{ga^4}{24l}+\frac{ga^2l}{6}$$

C_3 を (8) 式に代入する。

$$C_1 = -\frac{qa^3}{6} + \frac{qa^4}{24l} + \frac{qa^2 l}{6}$$

以上の結果を (2), (3), (5), (6) 式に代入する。

A − C 間

$$E\cdot I\cdot\frac{dy_1}{dx} = \frac{q}{6}x^3 - \frac{qa}{4l}(2l-a)\cdot x^2 - \frac{qa^3}{6} + \frac{qa^4}{24l} + \frac{qa^2 l}{6} \qquad \text{-------} \ (10)$$

$$E\cdot I\cdot y = \frac{q}{24}x^4 - \frac{qa}{12l}(2l-a)x^3 + \left(-\frac{qa^3}{6} + \frac{qa^4}{24l} + \frac{qa^2 l}{6}\right)x \qquad \text{-------} \ (11)$$

B − C 間

$$E\cdot I\cdot\frac{dy_2}{dx} = \frac{qa^2}{4l}x^2 - \frac{qa^2}{2}x + \frac{qa^4}{24l} + \frac{qa^2 l}{6} \qquad \text{-------} \ (12)$$

$$E\cdot I\cdot y_2 = \frac{qa^2}{12l}x^3 - \frac{qa^2}{4}x^2 + \left(\frac{qa^4}{24l} + \frac{qa^2 l}{6}\right)x - \frac{qa^4}{24} \qquad \text{------} \ (13)$$

中央 ($x = l/2$) のモーメント

$$M = -\frac{qa^2}{2l}\cdot\frac{l}{2} + \frac{qa^2}{2} = \frac{1}{4}qa^2$$

A − C 間のせん断力は

$$\frac{dM}{dx} = -qx + \frac{qa}{2l}(2l-a) \qquad \text{------} \ (14)$$

A 点のせん断力は (14) 式に $x = 0$ を代入して

$$Q = \frac{qa}{2l}(2l-a)$$

B − C 間のせん断力は

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{qa^2}{2l} \qquad \text{-------} \ (15)$$

従って B − C 間はせん断力は一定である。

中央 ($x = l/2$) のたわみは (13) 式より

$$E\cdot I\cdot y_2 = \frac{qa^2}{12l}\cdot\frac{l^3}{8} - \frac{qa^2}{4}\cdot\frac{l^2}{4} + \frac{qa^4}{48} + \frac{qa^2l^2}{12} - \frac{qa^4}{24}$$

$$y_2 = \frac{1}{EI}\cdot\left(\frac{qa^2l^2}{96} - \frac{qa^2l^2}{16} + \frac{qa^4}{48} + \frac{qa^2l^2}{12} - \frac{qa^4}{24}\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\cdot\left(-\frac{qa^4}{48} + \frac{qa^2l^2}{32}\right)$$

(例題 2・8)　左図の如き両端固定梁に集中荷重 P が作用した時の応力及び弾性曲線式を求めよ。

但し梁の曲げ剛さを E・I とする。

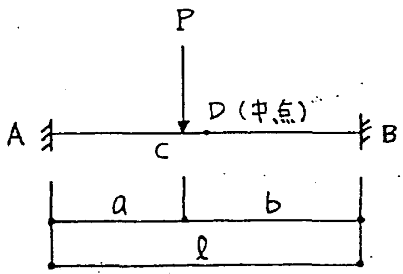


図 − 2・10 (a)

(解) 構造物の判別を行う。

$r = 0 \quad s = 1 \quad n = 6 \quad k = 2$

$r + s + n - 2k = 3$ (3 次の不静定梁)

この様な不静定梁を解くには，反力数 (支持条件の数) を 3 つ変える事により静定構造 (静定基本構と呼ぶ) におきかえて計算する。

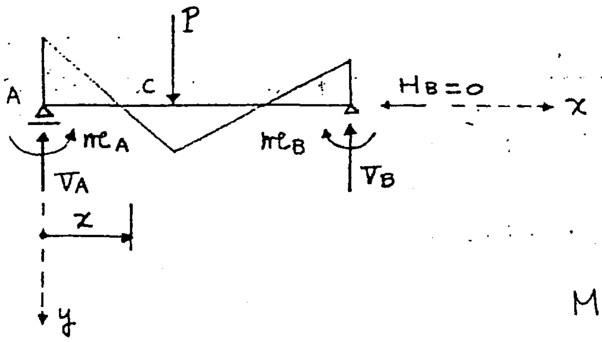


図 − 2・10 (b)

左図の如く静定基本構を単純梁として計算する。

曲げモーメントの一般式は

$$M_{AC} = V_A \cdot x - \mathcal{M}_A \quad \text{------} (1)$$

$$M_{CB} = V_A \cdot x - P(x - a) - \mathcal{M}_A$$

$$= (V_A - P) \cdot x + P \cdot a - \mathcal{M}_A \quad \text{------} (2)$$

A − C 間のたわみを y_1 ，C − B 間のたわみを y_2 とする。

A − C 間の弾性曲線式

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -M = -V_A \cdot x + \mathcal{M}_A \quad \text{-----} (3)$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{2} V_A \cdot x^2 + \mathcal{M}_A x + C_1 \quad \text{------} (4)$$

$$E\cdot I\cdot y_1 = -\frac{1}{6}V_A\cdot x^3 + \frac{1}{2}M_A\cdot x^2 + C_1\cdot x + C_2 \quad \text{-------}(5)$$

C － B間の弾性曲線式

$$E\cdot I\cdot\frac{d^2y_2}{dx^2} = -M = -(V_A-P)\cdot x - P\cdot a + M_A \quad \text{-------}(6)$$

$$E\cdot I\cdot\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2}(V_A-P)\cdot x^2 - (P\cdot a - M_A)\cdot x + C_3 \quad \text{------}(7)$$

$$E\cdot I\cdot y_2 = -\frac{1}{6}(V_A-P)\cdot x^3 - \frac{1}{2}(P\cdot a - M_A)\cdot x^2 + C_3\cdot x + C_4 \quad \text{------}(8)$$

境界条件より積分定数を求める。

A点（$x=0$）において　$y_1=0$　であるから (5) 式より

$$C_2 = 0 \quad \text{-----}(9)$$

A点（$x=0$）において　$\frac{dy_1}{dx}=0$　であるから (4) 式より

$$C_1 = 0 \quad \text{------}(10)$$

B点（$x=l$）において　$y_2=0$　であるから (8) 式より

$$-\frac{1}{6}(V_A-P)\cdot l^3 - \frac{1}{2}(P\cdot a - M_A)\cdot l^2 + C_3\cdot l + C_4 = 0 \quad \text{------}(11)$$

B点（$x=l$）において　$\frac{dy_1}{dx}=0$　であるから (7) 式より

$$-\frac{1}{2}(V_A-P)l^2 - (P\cdot a - M_A)\cdot l + C_3 = 0$$

$$C_3 = \frac{1}{2}(V_A-P)l^2 + (Pa - M_A)\cdot l \quad \text{------}(12)$$

(12) 式を (11) 式に代入する。

$$C_4 = \frac{1}{6}(V_A-P)l^3 + \frac{1}{2}(P\cdot a - M_A)l^2 - \frac{1}{2}(V_A-P)l^3 - (Pa-M_A)l^2$$

$$= -\frac{1}{3}(V_A-P)l^3 - \frac{1}{2}(Pa-M_A)l^2 \quad \text{------}(13)$$

C点（$x=a$）において　$y_1=y_2$　であるから (5), (8) 式より

$$-\frac{1}{6}V_A\cdot a^3 + \frac{1}{2}M_A\cdot a^2 = -\frac{1}{6}(V_A-P)a^3 - \frac{1}{2}(Pa-M_A)\cdot a^2$$

$$+\frac{1}{2}(V_A-P)l^2a + (Pa-M_A)\cdot l\cdot a - \frac{1}{3}(V_A-P)l^3 - \frac{1}{2}(Pa-M_A)l^2$$

$$-\frac{1}{3}Pa^3 + \frac{1}{2}V_Al^2a - Pl^2a + Pla^2 - M_Ala - \frac{1}{3}V_Al^3 + \frac{1}{3}Pl^3$$

$$+\frac{1}{2}M_Al^2 = 0 \quad \text{-----}(14)$$

C点（$x=a$）において　$\dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{dy_2}{dx}$　であるから（4），（7）式より

$$-\frac{1}{2}V_A\cdot a^2 + M_A\cdot a = -\frac{1}{2}(V_A-P)\cdot a^2 - (P\cdot a - M_A)a$$
$$+\frac{1}{2}(V_A-P)\ell^2 + (Pa - M_A)\cdot \ell$$

$$-\frac{1}{2}Pa^2 + \frac{1}{2}V_A\ell^2 - \frac{1}{2}P\ell^2 + Pa\ell - M_A\ell = 0$$

$$M_A = -\frac{Pa^2}{2\ell} + \frac{V_A\ell}{2} - \frac{P\ell}{2} + Pa$$
$$= \frac{1}{2\ell}\left(-Pa^2 + V_A\ell^2 - P\ell^2 + 2Pa\ell\right) \qquad \text{------ (15)}$$

（15）式を（14）式に代入する

$$-\frac{1}{3}Pa^3 + \frac{1}{2}V_A\ell^2 a - P\ell^2 a + P\ell a^2 - \frac{a}{2}\left(-Pa^2 + V_A\ell^2 - P\ell^2 + 2Pa\ell\right)$$
$$-\frac{1}{3}V_A\ell^3 + \frac{1}{3}P\ell^3 + \frac{\ell}{4}\left(-Pa^2 + V_A\ell^2 - P\ell^2 + 2Pa\ell\right) = 0$$

$$-\frac{1}{3}Pa^3 + \frac{1}{2}V_A\ell^2 a - P\ell^2 a + P\ell a^2 + \frac{1}{2}Pa^3 - \frac{1}{2}V_A\ell^2 a + \frac{1}{2}P\ell^2 a - P\ell a^2$$
$$-\frac{1}{3}V_A\ell^3 + \frac{1}{3}P\ell^3 - \frac{1}{4}P\ell a^2 + \frac{1}{4}V_A\ell^3 - \frac{1}{4}P\ell^3 + \frac{1}{2}P\ell^2 a = 0$$

$$-\frac{1}{12}V_A\ell^3 + \frac{1}{6}Pa^3 + \frac{1}{12}P\ell^3 - \frac{1}{4}P\ell a^2 = 0$$

$$V_A = \frac{12}{\ell^3}\left(\frac{1}{6}Pa^3 + \frac{1}{12}P\ell^3 - \frac{1}{4}P\ell a^2\right)$$
$$= \frac{P}{\ell^3}\left(2a^3 + \ell^3 - 3a^2\ell\right) \qquad \text{----- (16)}$$

（16）式を（15）式に代入する

$$M_A = -\frac{Pa^2}{2\ell} + \frac{\ell}{2}\cdot\frac{P}{\ell^3}\left(2a^3 + \ell^3 - 3a^2\ell\right) - \frac{P\ell}{2} + Pa$$
$$= -\frac{Pa^2}{2\ell} + \frac{Pa^3}{\ell^2} + \frac{P\ell}{2} - \frac{3Pa^2}{2\ell} - \frac{P\ell}{2} + Pa$$
$$= \frac{Pa^3}{\ell^2} - \frac{2Pa^2}{\ell} + Pa$$
$$= \frac{Pa}{\ell^2}\left(a^2 - 2a\ell + \ell^2\right)$$
$$= \frac{Pa}{\ell^2}\left(a^2 - 2a^2 - 2ab + a^2 + 2ab + b^2\right)$$
$$= \frac{Pab^2}{\ell^2} \qquad \text{----- (17)}$$

A点の曲げモーメント

(1) 式より $M_A = V_A \cdot x - M = -\dfrac{Pab^2}{l^2}$ ------- (18)

B点の曲げモーメント

(2) 式より

$$\begin{aligned} M_B &= (V_A - P)\cdot x + Pa - M_A \\ &= \left\{\frac{P}{l^3}(2a^3 + l^3 - 3a^2 l) - P\right\}\cdot l + Pa - \frac{Pab^2}{l^2} \\ &= \frac{P}{l^2}(2a^3 + l^3 - 3a^2 l - l^3) + Pa - \frac{Pab^2}{l^2} \\ &= -\frac{Pa^2 b}{l^2} \end{aligned}$$ ------- (19)

C点の曲げモーメント

(1) 式に $x = a$ を代入する

$$\begin{aligned} M_C &= \frac{P}{l^3}(2a^3 + l^3 - 3a^2 l)\cdot a - \frac{Pab^2}{l^2} \\ &= \frac{Pa}{l^3}\{2a^3 + (a+b)^3 - 3a^2(a+b) - b^2(a+b)\} \\ &= \frac{Pa}{l^3}(2a^3 + a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 - 3a^3 - 3a^2 b - ab^2 - b^3) \\ &= \frac{2Pa^2 b^2}{l^3} \end{aligned}$$ ------- (20)

中点 $(x = l/2)$ の曲げモーメント

(1) 式に $x = l/2$ を代入して

$$\begin{aligned} M_{中央} &= \frac{P}{l^3}(2a^3 + l^3 - 3a^2 l)\cdot\frac{l}{2} - \frac{Pab^2}{l^2} \\ &= \frac{P}{2l^2}(2a^3 + l^3 - 3a^2 l - 2ab^2) \\ &= \frac{P}{2l^2}\{2a^3 + (a+b)^3 - 3a^2(a+b) - 2ab^2\} \\ &= \frac{P}{2l^2}(2a^3 + a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 - 3a^3 - 3a^2 b - 2ab^2) \\ &= \frac{P}{2l^2}(ab^2 + b^3) \\ &= \frac{Pb^2}{2l^2}(a+b) \\ &= \frac{Pb^2}{2l} \end{aligned}$$ ------- (21)

C点（$x=a$）のたわみは(5)式より

$$E\cdot I y_c = -\frac{1}{6} V_A \cdot x^3 + \frac{1}{2} M_A \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2$$

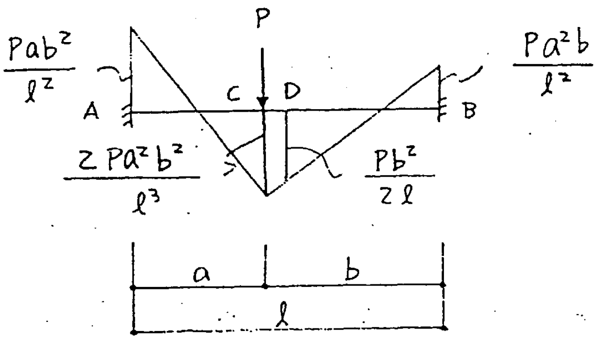
$$= -\frac{1}{6}\cdot\frac{P}{l^3}(2a^3+l^3-3a^2 l)\cdot a^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{Pab^2}{l^2}\cdot a^2$$

$$= -\frac{Pa^3}{6l^3}\{2a^3+(a+b)^3-3a^2(a+b)-3b^2(a+b)\}$$

$$= -\frac{Pa^3}{6l^3}(2a^3+a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^3-3a^2b-3ab^2-3b^3)$$

$$= -\frac{Pa^3}{6l^3}(-2b^3)$$

$$y_c = \frac{Pa^3b^3}{3EIl^3} \qquad \text{------ (22)}$$



図− 2.10 (c)

補 足　梁下側のモーメント計算について

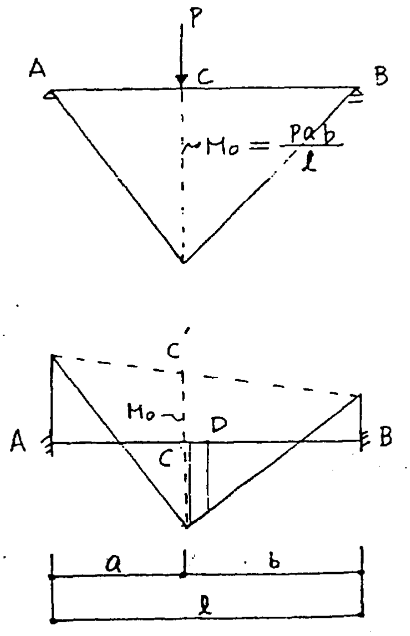


図 − 2.10 (d)

左図の如く両端を単純支持とした時と両端固定とした時のモーメントの総量(M_0)は同じである。

一般の構造計算では両端のモーメントが先に求まる。

従ってC点のモーメントはM_0から$C-C'$を引けばよい。

これを計算で確認してみる。

c－c'を求める

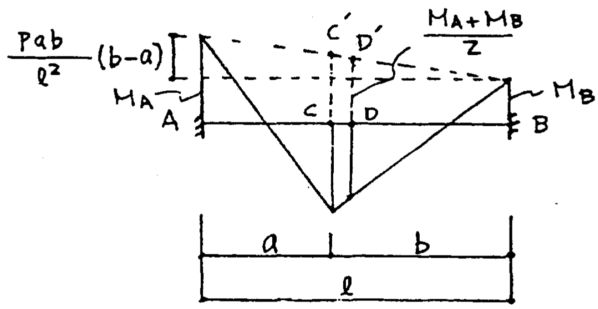
$$\frac{Pab^2}{\ell^2}-\frac{Pa^2b}{\ell^2}=\frac{Pab}{\ell^2}(b-a)$$

$$\ell : \frac{Pab(b-a)}{\ell^2}=b : x$$

$$x=\frac{Pab^2(b-a)}{\ell^3}$$

$$c-c'=\frac{Pa^2b}{\ell^2}+\frac{Pab^2(b-a)}{\ell^3}$$

$$=\frac{Pab(a\ell+b^2-ab)}{\ell^3}=\frac{Pab(a^2+b^2)}{\ell^3}$$



図－2·10 (e)

従って D 点下側のモーメントは

$$M_D=\frac{Pab}{\ell}-\frac{Pab(a^2+b^2)}{\ell^3}=\frac{Pab}{\ell^3}(\ell^2-a^2-b^2)$$

$$=\frac{Pab}{\ell^3}(a^2+2ab+b^2-a^2-b^2)=\frac{2Pa^2b^2}{\ell^3} \qquad \text{------ (23)}$$

中央下端のモーメント（D点）の計算

一般には略算的に $M_D=M_0-\frac{M_A+M_D}{2}$ として求める。

モーメントが大きく（安全側）なるため，構造計算する場合はこの方法に依る場合が多い。

この方法で計算すると

$$M_D=M_0-\frac{M_A+M_B}{2}$$

$$=\frac{Pab}{\ell}-\frac{1}{2}\left(\frac{Pab^2}{\ell^2}+\frac{Pa^2b}{\ell^2}\right)$$

$$=\frac{Pab}{\ell}-\frac{Pab}{2\ell^2}(b+a)$$

$$=\frac{Pab}{\ell}-\frac{Pab}{2\ell}$$

$$=\frac{Pab}{2\ell} \qquad \text{------- (24)}$$

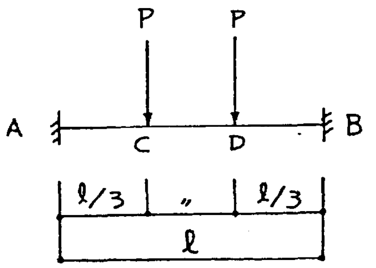
(21) 式と比較すると若干異なった値を得る。

以後のラーメン等の中央のモーメントはこの略算方法を用いる。

（例題 2・9）

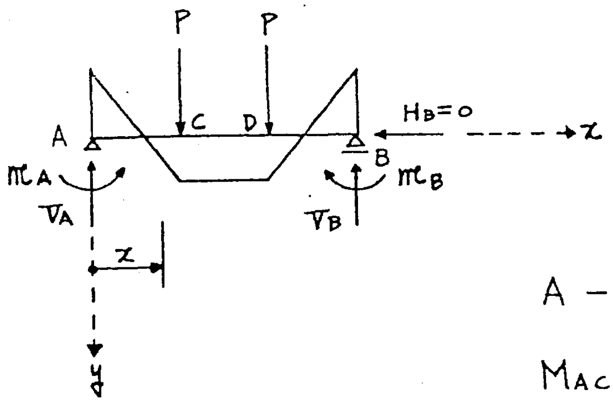
左図の如き両端固定梁に2点集中荷重が作用した時の応力及び弾性曲線式を求めよ。

但し梁の曲げ剛さを E・I とする。



図－2.11 (a)

（解）　3次の不静定梁であるから，静定基本構を単純梁として計算する。



図－2.11 (b)

対象荷重であるから反力は

$$V_A = V_B = P \qquad \text{-------} (1)$$

曲げモーメントの一般式は

A－C 間

$$M_{AC} = P\cdot x - \mathfrak{M}_A \qquad \text{------} (2)$$

C－D 間

$$M_{CD} = P\cdot x - \mathfrak{M}_A - P\left(x - \frac{l}{3}\right)$$
$$= -\mathfrak{M}_A + \frac{1}{3}Pl \qquad \text{-----} (3)$$

A－C 間のたわみを y_1，C－D 間のたわみを y_2 とする。

A－C 間の弾性曲線式

$$E\cdot I\cdot\frac{d^2y_1}{dx^2} = -M = -Px + \mathfrak{M}_A \qquad \text{------} (4)$$

$$E\cdot I\cdot\frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{2}Px^2 + \mathfrak{M}_A x + C_1 \qquad \text{------} (5)$$

$$E\cdot I\cdot y_1 = -\frac{1}{6}Px^3 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}_A x^2 + C_1 x + C_2 \qquad \text{------} (6)$$

C－D 間の弾性曲線式

$$E\cdot I\cdot\frac{d^2y_2}{dx^2} = -M = \mathfrak{M}_A - \frac{1}{3}Pl \qquad \text{------} (7)$$

$$E\cdot I\cdot\frac{dy_2}{dx} = \left(\mathfrak{M}_A - \frac{1}{3}Pl\right)x + C_3 \qquad \text{-------} (8)$$

$$E \cdot I \cdot y_2 = \frac{1}{2}\left(M_A - \frac{1}{3}Pl\right)x^2 + C_3 x + C_4 \qquad \text{------- (9)}$$

境界条件より積分定数を求める

A点（$x=0$）において $\frac{dy_1}{dx}=0$ であるから（5）式より

$$C_1 = 0 \qquad \text{------- (10)}$$

A点（$x=0$）において $y_1=0$ であるから（6）式より

$$C_2 = 0 \qquad \text{------- (11)}$$

C点（$x=\frac{l}{3}$）において $\frac{dy_1}{dx}=\frac{dy_2}{dx}$ であるから（5），（8）式より

$$-\frac{1}{2}P\cdot\frac{l^2}{9} + M_A\frac{l}{3} = \left(M_A - \frac{1}{3}Pl\right)\cdot\frac{l}{3} + C_3$$

$$C_3 = -\frac{1}{18}Pl^2 + \frac{1}{3}M_A l - \frac{1}{3}M_A l + \frac{1}{9}Pl^2 = \frac{1}{18}Pl^2 \qquad \text{---- (12)}$$

C点（$x=\frac{l}{3}$）において $y_1=y_2$ であるから（6），（9）式より

$$-\frac{1}{6}P\cdot\frac{l^3}{27} + \frac{1}{2}M_A\cdot\frac{l^2}{9} = \frac{1}{2}\left(M_A - \frac{1}{3}Pl\right)\cdot\frac{l^2}{9} + \frac{Pl^2}{18}\cdot\frac{l}{3} + C_4$$

$$C_4 = -\frac{1}{162}Pl^3 + \frac{1}{18}M_A l^2 - \frac{1}{18}M_A l^2 + \frac{1}{54}Pl^3 - \frac{1}{54}Pl^3$$

$$= -\frac{1}{162}Pl^3 \qquad \text{------ (13)}$$

対象荷重であるから梁の中央（$x=l/2$）のたわみ角は0であるから（8）式より

$$\left(M_A - \frac{1}{3}Pl\right)\cdot\frac{l}{2} + \frac{1}{18}Pl^2 = 0$$

$$M_A - \frac{1}{3}Pl = -\frac{Pl}{9}$$

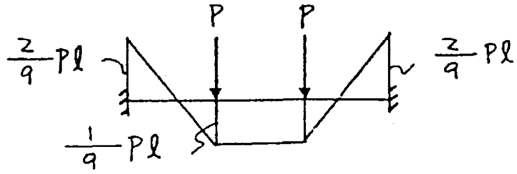
$$M_A = -\frac{Pl}{9} + \frac{3Pl}{9} = \frac{2}{9}Pl \qquad \text{------ (14)}$$

A点の曲げモーメントは（2）式より

$$M_A = -\frac{2}{9}Pl$$

C－D間の曲げモーメントは（3）式より

$$M_{C-D} = -\frac{2}{9}Pl + \frac{1}{3}Pl = \frac{1}{9}Pl \qquad \text{----- (15)}$$



曲げモーメント図

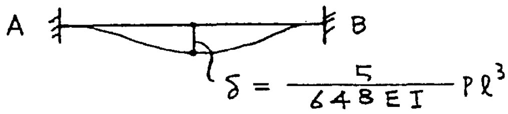
図－2・11（C）

中央（$x=\ell/2$）のたわみは（9）式より

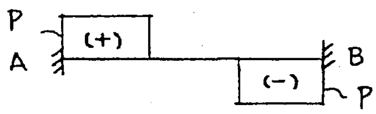
$$E\cdot I\cdot y_2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}P\ell-\frac{1}{3}P\ell\right)\cdot\frac{\ell^2}{4}+\frac{1}{18}P\ell^2\cdot\frac{\ell}{2}-\frac{1}{162}P\ell^3$$

$$=-\frac{1}{72}P\ell^3+\frac{1}{36}P\ell^3-\frac{1}{162}P\ell^3$$

$$y_2=\frac{5}{648EI}P\ell^3$$



図－2・11（d）

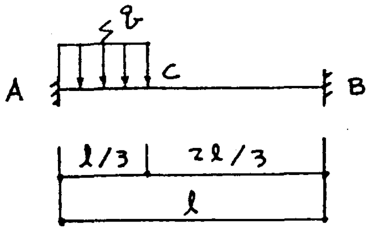


せん断力図

図－2・11（e）

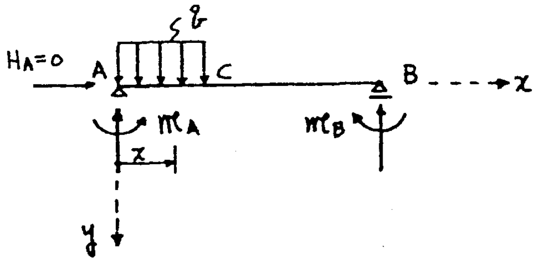
（例題 2・10）　左図の如き両端固定梁に等分布荷重が一部に作用した時の応力及び弾性曲線式を求めよ。

但し梁の曲げ剛さを E・I とする。



図－2・12 (a)

（解）　3次の不静定梁であるから，静定基本構を単純梁として計算する。



図－2・12 (b)

A－C間の曲げモーメント

$$M_{AC} = \mathcal{V}_A \cdot x - \mathcal{M}_A - \frac{q}{2}x^2$$

$$= -\frac{q}{2}x^2 + \mathcal{V}_A x - \mathcal{M}_A \quad \text{-------- (1)}$$

C－B間の曲げモーメント

$$M_{CB} = \mathcal{V}_A \cdot x - \mathcal{M}_A - \left(x - \frac{l}{6}\right) \cdot \frac{1}{3}ql$$

$$= \left(\mathcal{V}_A - \frac{1}{3}ql\right)x - \mathcal{M}_A + \frac{1}{18}ql^2$$

-------- (2)

A－C間のたわみを y_1，C－B間のたわみを y_2 とする。

A－C間の弾性曲線式

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -M = \frac{q}{2}x^2 - \mathcal{V}_A x + \mathcal{M}_A \quad \text{-------- (3)}$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{2}\mathcal{V}_A x^2 + \mathcal{M}_A x + C_1 \quad \text{-------- (4)}$$

$$E \cdot I \cdot y_1 = \frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{6}\mathcal{V}_A x^3 + \frac{1}{2}\mathcal{M}_A x^2 + C_1 x + C_2 \quad \text{-------- (5)}$$

C－B間の弾性曲線式

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -M = -\left(\mathcal{V}_A - \frac{1}{3}ql\right)x + \mathcal{M}_A - \frac{1}{18}ql^2 \quad \text{------ (6)}$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2}\left(\mathcal{V}_A - \frac{1}{3}ql\right)x^2 + \left(\mathcal{M}_A - \frac{1}{18}ql^2\right)x + C_3 \quad \text{------ (7)}$$

$$E \cdot I \cdot y_2 = -\frac{1}{6}\left(\mathcal{V}_A - \frac{1}{3}ql\right)x^3 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{M}_A - \frac{1}{18}ql^2\right)x^2 + C_3 x + C_4$$

-------- (8)

境界条件より積分定数を求める

A点 ($x=0$) において $\dfrac{dy_1}{dx}=0$ であるから (4) 式より

$$C_1=0 \qquad \text{------ (9)}$$

A点 ($x=0$) において $y_1=0$ であるから (5) 式より

$$C_2=0 \qquad \text{------ (10)}$$

B点 ($x=l$) において $\dfrac{dy_2}{dx}=0$ であるから (7) 式より

$$-\frac{1}{2}\left(V_A-\frac{1}{3}ql\right)l^2+\left(M_A-\frac{1}{18}ql^2\right)l+C_3=0$$

$$C_3=\frac{1}{2}V_Al^2-M_Al-\frac{1}{9}ql^3 \qquad \text{------ (11)}$$

B点 ($x=l$) において $y_2=0$ であるから (8) 式より

$$-\frac{1}{6}\left(V_A-\frac{1}{3}ql\right)l^3+\frac{1}{2}\left(M_A-\frac{1}{18}ql^2\right)l^2+\frac{1}{2}V_Al^3-M_Al^2-\frac{1}{9}ql^4$$

$$+C_4=0$$

$$-\frac{1}{6}V_Al^3+\frac{1}{18}ql^4+\frac{1}{2}M_Al^2-\frac{1}{36}ql^4+\frac{1}{2}V_Al^3-M_Al^2-\frac{1}{9}ql^4+C_4=0$$

$$C_4=-\frac{1}{3}V_Al^3+\frac{1}{2}M_Al^2+\frac{1}{12}ql^4 \qquad \text{------ (12)}$$

C点 ($x=l/3$) の時 $\dfrac{dy_1}{dx}=\dfrac{dy_2}{dx}$ であるから (4) (7) 式より

$$\frac{1}{6}q\left(\frac{l}{3}\right)^3-\frac{1}{2}V_A\left(\frac{l}{3}\right)^2+M_A\cdot\frac{l}{3}=-\frac{1}{2}\left(V_A-\frac{1}{3}ql\right)\cdot\left(\frac{l}{3}\right)^2+\left(M_A-\frac{1}{18}ql^2\right)$$

$$\times\frac{l}{3}+\frac{1}{2}V_Al^2-M_Al-\frac{1}{9}ql^3$$

$$\frac{1}{162}ql^3-\frac{1}{18}V_Al^2+\frac{1}{3}M_Al=-\frac{1}{18}V_Al^2+\frac{1}{54}ql^3+\frac{1}{3}M_Al-\frac{1}{54}ql^3$$

$$+\frac{1}{2}V_Al^2-M_Al-\frac{1}{9}ql^3$$

$$-\frac{1}{2}V_Al^2+M_Al=-\frac{19}{162}ql^3$$

$$M_A=\frac{1}{2}V_Al-\frac{19}{162}ql^2 \qquad \text{------ (13)}$$

C点 ($x=l/3$) の時 $y_1=y_2$ であるから (5), (8) 式より

$$\frac{1}{24}q\left(\frac{l}{3}\right)^4-\frac{1}{6}V_A\left(\frac{l}{3}\right)^3+\frac{1}{2}M_A\left(\frac{l}{3}\right)^2=-\frac{1}{6}\left(V_A-\frac{1}{3}ql\right)\cdot\left(\frac{l}{3}\right)^3+\frac{1}{2}\left(M_A-\right.$$

$$\left.\frac{1}{18}ql^2\right)\cdot\left(\frac{l}{3}\right)^2+\frac{1}{2}V_Al^2\cdot\frac{l}{3}-M_Al\cdot\frac{l}{3}-\frac{1}{9}ql^3\cdot\frac{l}{3}-\frac{1}{3}V_Al^3+\frac{1}{2}M_Al^2+\frac{1}{12}ql^4$$

$$\frac{1}{1944}ql^4 - \frac{1}{162}V_A l^3 + \frac{1}{18}m_A l^2 = -\frac{1}{162}V_A l^3 + \frac{1}{486}ql^4 + \frac{1}{18}m_A l^2 - \frac{1}{324}ql^4$$

$$+\frac{1}{6}V_A l^3 - \frac{1}{3}m_A l^2 - \frac{1}{27}ql^4 - \frac{1}{3}V_A l^3 + \frac{1}{2}m_A l^2 + \frac{1}{12}ql^4$$

$$\frac{1}{6}V_A l^3 - \frac{1}{6}m_A l^2 = \frac{29}{648}ql^4 \qquad \text{------ (14)}$$

(13) 式を (14) 式に代入する

$$\frac{1}{6}V_A l^3 - \frac{1}{6}l^2\left(\frac{1}{2}V_A l - \frac{19}{162}ql^2\right) = \frac{29}{648}ql^4$$

$$\frac{1}{6}V_A l^3 - \frac{1}{12}V_A l^3 + \frac{19}{972}ql^4 = \frac{29}{648}ql^4$$

$$\frac{1}{12}V_A l^3 = \frac{49}{1944}ql^4$$

$$V_A = \frac{49}{162}ql \qquad \text{------ (15)}$$

(15) を (13) に代入して

$$m_A = \frac{1}{2}\left(\frac{49}{162}ql\right)l - \frac{19}{162}ql^2$$

$$= \frac{49}{324}ql^2 - \frac{19}{162}ql^2 = \frac{11}{324}ql^2 \qquad \text{------ (16)}$$

A 点のモーメントは (1) 式に $x = 0$ を代入して

$$M_A = -\frac{11}{324}ql^2 \qquad \text{------ (17).}$$

B 点のモーメントは (2) 式に $x = l$ を代入して

$$M_B = \left(V_A - \frac{1}{3}ql\right)\cdot l - m_A + \frac{1}{18}ql^2$$

$$= \frac{49}{162}ql^2 - \frac{1}{3}ql^2 - \frac{11}{324}ql^2 + \frac{1}{18}ql^2$$

$$= -\frac{1}{108}ql^2 \qquad \text{------ (18)}$$

M_{max} は $Q = 0$ の点であるから (1) 式より

$$Q = \frac{dM}{dx} = -qx + V_A = 0$$

$$-qx + \frac{49}{162}ql = 0 \qquad \therefore\ x = \frac{49}{162}l \qquad \text{------ (19)}$$

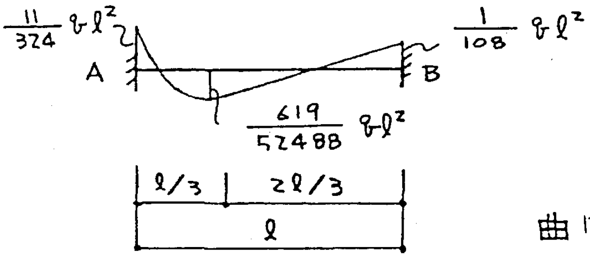
従って M_{max} は $x = \frac{49}{162}l$ を (1) 式に代入して

$$M_{max} = -\frac{q}{2}\cdot\left(\frac{49}{162}l\right)^2 + \frac{49}{162}ql\cdot\frac{49}{162}l - \frac{11}{324}ql^2$$

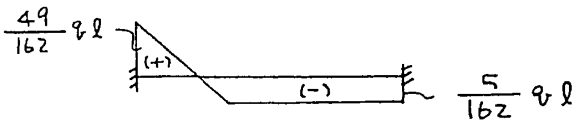
$$= -\frac{2401}{52488}ql^2 + \frac{2401}{26244}ql^2 - \frac{11}{324}ql^2$$

$$= \frac{619}{52488}ql^2 \qquad \text{------ (20)}$$

$$V_B = \frac{1}{3}ql - \frac{49}{162}ql = \frac{5}{162}ql \qquad \text{------- (21)}$$



曲げモーメント図



せん断力図

図－2.12 (c)

δmax $\left(x = \frac{49}{162}l \right)$ のたわみは (5) 式より

$$E \cdot I \cdot y_1 = \frac{1}{24}q\left(\frac{49}{162}l\right)^4 - \frac{1}{6}\cdot\frac{49}{162}ql\cdot\left(\frac{49}{162}l\right)^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{324}ql^2\cdot\left(\frac{49}{162}l\right)^2$$

$$= \left(\frac{5764801}{16529940860} - \frac{5764801}{4132485216} + \frac{26411}{17006112} \right) ql^4$$

$$= (3.487 - 13.95 + 15.53) \times 10^{-4} \cdot ql^4$$

$$y_1 = 5.067 \times 10^{-4} \times \frac{ql^4}{EI}$$

(例題 2・11)

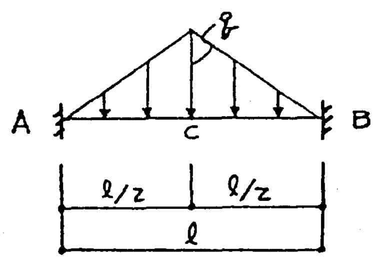


図 ― 2・13 (a)

左図の如き両端固定梁に三角分布荷重が作用する時の応力及び弾性曲線式を求めよ。

但し梁の曲げ剛性を E・I とする。

(解)　3次の不静定梁であるから，静定基本構を単純梁として計算する。

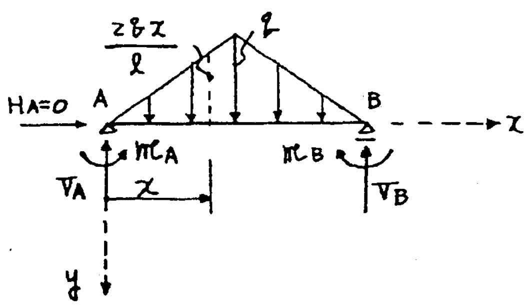


図 ― 2・13 (b)

対称荷重であるから垂直反力は

$$V_A = V_B = \frac{1}{4}ql \quad \text{------ (1)}$$

A ― C 間の曲げモーメント

$$M_{AC} = \frac{ql}{4}x - \frac{q}{3l}x^3 - M_A \quad \text{------ (2)}$$

対象であるから半分だけ解く

A ― C 間の弾性曲線式

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -M = \frac{q}{3l}x^3 - \frac{ql}{4}x + M_A \quad \text{------ (3)}$$

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{q}{12l}x^4 - \frac{ql}{8}x^2 + M_A x + C_1 \quad \text{------ (4)}$$

$$E \cdot I \cdot y = \frac{q}{60l}x^5 - \frac{ql}{24}x^3 + \frac{1}{2}M_A x^2 + C_1 x + C_2 \quad \text{----- (5)}$$

境界条件より積分定数を求める

A 点 ($x = 0$) の時　$\frac{dy}{dx} = 0$　であるから (4) 式より

$$C_1 = 0 \quad \text{------ (6)}$$

A 点 ($x = 0$) の時　$y = 0$　であるから (5) 式より

$$C_2 = 0 \quad \text{----- (7)}$$

C点（$x = l/2$）の時 $\frac{dy}{dx} = 0$ であるから

$$\frac{q}{12l}\left(\frac{l}{2}\right)^4 - \frac{ql}{8}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_A\cdot\frac{l}{2} = 0$$

$$\frac{ql^3}{192} - \frac{ql^3}{32} + \frac{1}{2}m_A l = 0$$

$$\frac{1}{2}m_A l = \frac{5}{192}ql^3 \quad \therefore m_A = \frac{5}{96}ql^2 \qquad \text{------ (8)}$$

A点（$x=0$）の曲げモーメントは（2）式より

$$M_A = -\frac{5}{96}ql^2 \qquad \text{------ (9)}$$

C点（$x = l/2$）の曲げモーメントは（2）式より

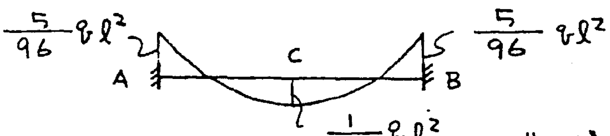
$$M_C = \frac{ql}{4}\cdot\frac{l}{2} - \frac{q}{3l}\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{5}{96}ql^2$$

$$= \frac{1}{8}ql^2 - \frac{1}{24}ql^2 - \frac{5}{96}ql^2 = \frac{1}{32}ql^2 \qquad \text{------ (10)}$$

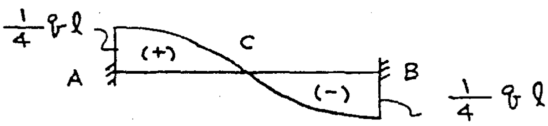
C点（$x = l/2$）のたわみは（5）式より

$$E\cdot I\cdot y = \frac{q}{60l}\left(\frac{l}{2}\right)^5 - \frac{ql}{24}\left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5ql^2}{96}\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$= \frac{ql^4}{1920} - \frac{ql^4}{192} + \frac{5ql^4}{768} = \frac{7}{3840}ql^2 \qquad \text{------ (11)}$$



曲げモーメント図

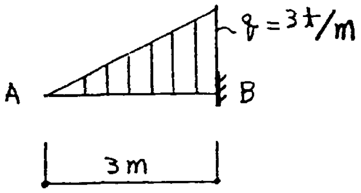


せん断力図

図－2・13（c）

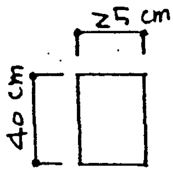
—— 練 習 問 題 ——

（問題 2-1）



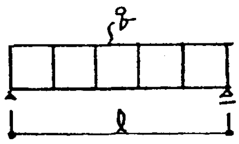
左図の如き片持梁に分布荷重が作用した時，先端Aのたわみを求めよ。

梁は鉄筋コンクリートとし下図断面とする。



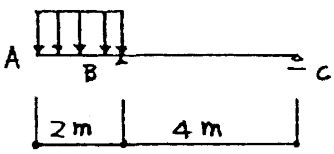
$E_c = 2.1 \times 10^5 \ kg/cm^2$

（問題 2-2） 左図の如き単純梁が等分布荷重を受ける時，中央のたわみを求めよ。

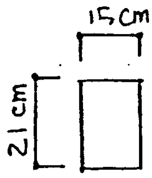


但し，梁の曲げ剛さ(E·I)は一定とする。

（問題 2-3） 左図の如きはね出し式単純梁に等分布荷重が作用した時，先端Aのたわみを求めよ。

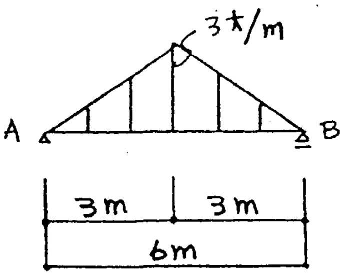


梁は木材で下図断面とする。



$E_w = 70000 \ kg/cm^2$

（問題 2-4） 左図の如き単純梁に三角分布荷重が作用した時，中央のたわみを求めよ。

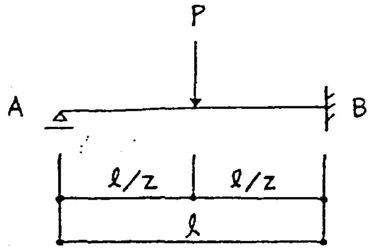


梁は鉄骨とする

H − 250 × 125 × 6 × 9

$I = 4050 \ cm^4$

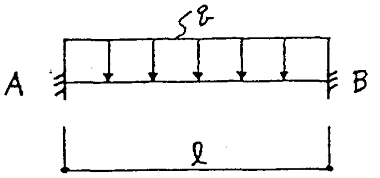
（問題 2・5）



左図の如き不静定梁の曲げモーメントと中央のたわみを求めよ。

但し梁の曲げ剛さを E・I（一定）とする。

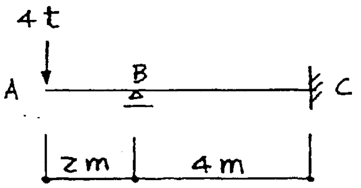
（問題 2・6）



左図の如き両端固定梁の曲げモーメントと中央のたわみを求めよ。

但し梁の曲げ剛さを E・I（一定）とする。

（問題 2・7）

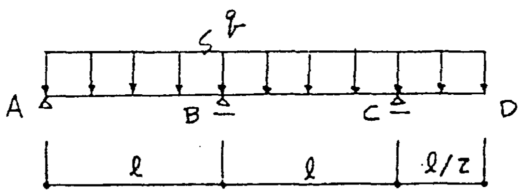


左図の如き不静定梁に集中荷重が作用した時，A点のたわみと曲げモーメント図を求めよ。

梁は鉄骨で　H − 250×125×6×9

$I = 4050\ cm^4$

（問題 2・8）



左図の如き連続梁が等分布荷重を受ける時の曲げモーメント図とD点のたわみを求めよ。

梁の曲げ剛さを E・I（一定）とする。

第３章　荷重項と剛比

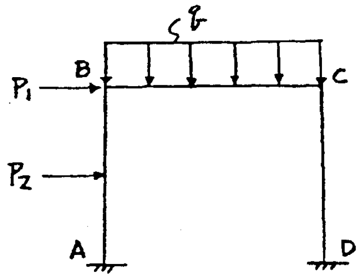
3・1　概説

不静定ラーメンの応力を求める方法は各種あるが，本書では一般的な固定モーメント法（moment distribution method），及び撓角法（slope detlection method）等に依って応力解析を行っている。

これらの各方法共，荷重項と剛比を知らなければ応力を求める事が出来ない。

そこで本章ではそれらについて述べる。

3・2　荷重項とは



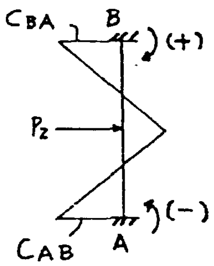
図－3・1

部材の中間に荷重が加わっている時，その部材の両端を固定とした時の端部のモーメント（固定端モーメント）を荷重項と言い（C）で表わす。

図－3・1の不静定ラーメンについて考える。

図においてP_1はラーメンの節点に作用しているのでP_1による荷重項は生じない。

A－B部材について

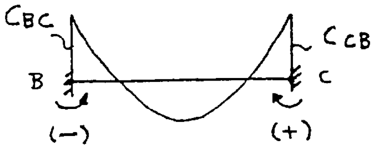


図－3・2

A端，B端を固定とした時のP_2による端部のモーメントがC_{AB}，C_{BA}である。その点を中心に時計回りを(+)反時計回りを(−)とする。

従って C_{AB} は負であり C_{BA} は正のモーメントとなる。

B－C部材について



図－3・3

B端，C端を固定とした時の等分布荷重（ℓ）による端部のモーメントが C_{BC}，C_{CB} である。符号は C_{BC} は負で C_{CB} は正である。

C－D部材について

C－D部材は中間に荷重が作用していないので荷重項はなく　$C_{CD} = C_{DC} = 0$　である。

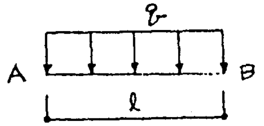
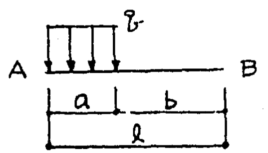
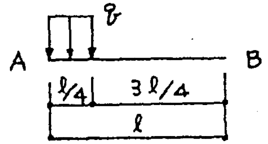
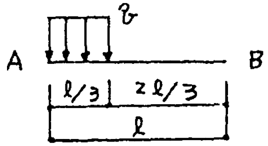
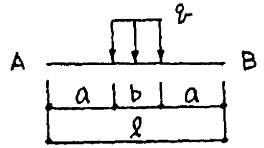
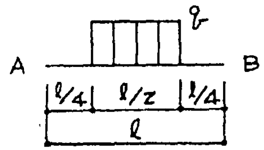
荷重項（固定端モーメント）は第2章で弾性曲線式を用いて例題をいくつか解いている。

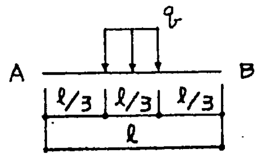
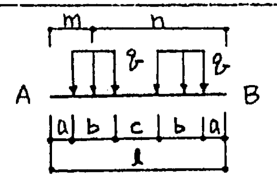
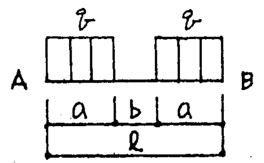
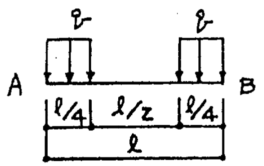
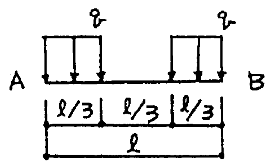
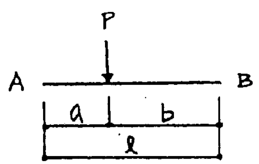
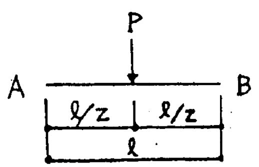
表－3・1に荷重項の算定をいくつか行ない，その結果を挙げる。

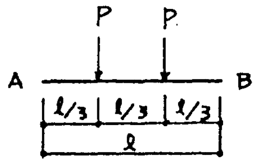
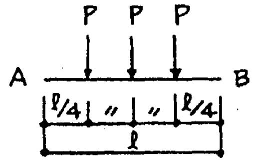
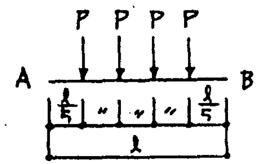
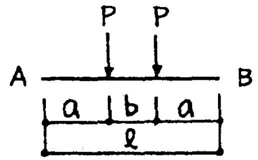
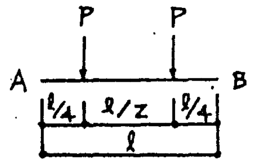
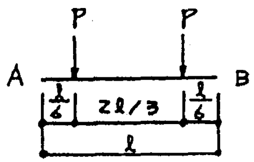
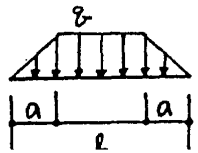
表中の記号は下記の如し

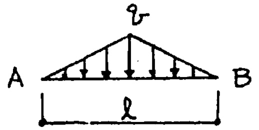
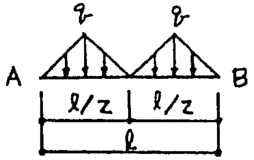
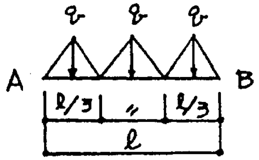
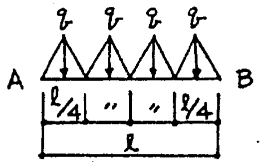
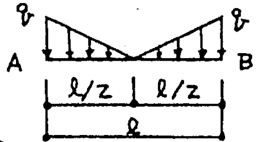
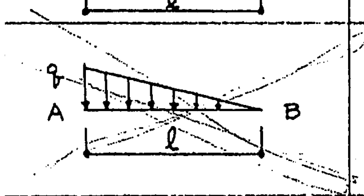
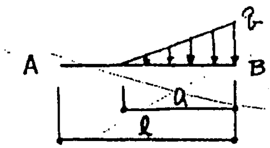
- C：固定端モーメント
- M_o：両端単純支持の時の中央のモーメント
- M_e：両端固定の時の中央のモーメント
- Q_o：両端単純支持の時のせん断力
- δ_o：両端単純支持の時の最大たわみ
- δ_e：両端固定の時の最大たわみ
- x_o：max M_o の起点距離
- E：ヤング係数
- I：断面二次モーメント

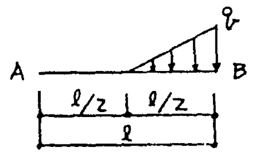
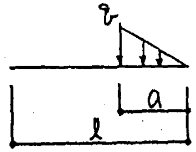
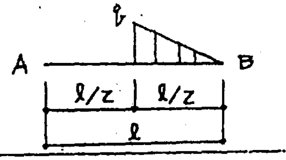
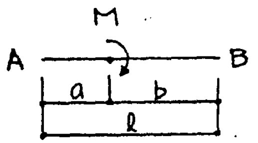
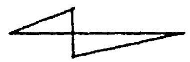
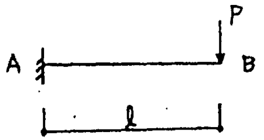
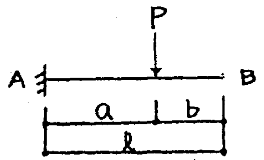
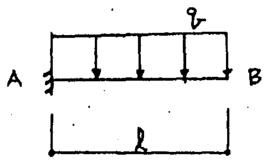
表－3・1　荷重項の算定　（梁の　C，M_0，Q_0，δ_0，δ_e）

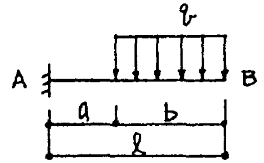
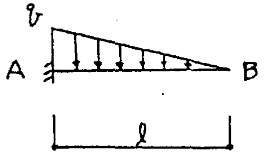
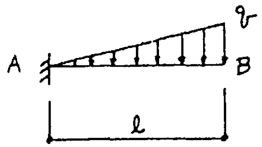
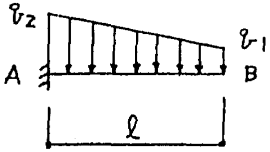
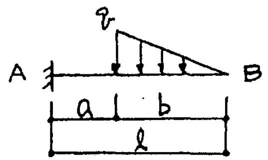
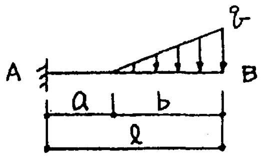
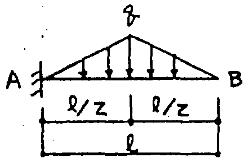
荷重状態	C	M_0	M_e	Q_0	δ_0 , δ_e
 	$\frac{q\ell^2}{12}$	$\frac{q\ell^2}{8}$ or $1.5C$	$\frac{q\ell^2}{24}$ or $0.5C$	$\frac{q\ell}{2}$	$\delta_0 = \frac{5q\ell^4}{384EI}$ $\delta_e = \frac{q\ell^4}{384EI}$
 	$C_A = \frac{qa^2}{12\ell^2}(\ell^2+2\ell b+3b^2)$ $C_B = \frac{qa^3}{12\ell^2}(\ell+3b)$	$x_0 = \frac{a}{2\ell}(a+2b)$ $M_0 = \frac{qa^2}{8\ell^2}(a+2b)^2$		$Q_A = \frac{qa}{2\ell}(a+2b)$ $Q_B = \frac{qa^2}{2\ell}$	
 	$C_A = \frac{67}{3072}q\ell^2$ $C_B = \frac{13}{3072}q\ell^2$	$\frac{49}{2048}q\ell^4$		$Q_A = \frac{7}{32}q\ell$ $Q_B = \frac{1}{32}q\ell$	
 	$C_A = \frac{11}{324}q\ell^2$ $C_B = \frac{1}{108}q\ell^2$	$\frac{25}{216}q\ell^4$		$Q_A = \frac{5}{18}q\ell$ $Q_B = \frac{1}{18}q\ell$	
 	$\frac{qb}{12\ell}(\ell^2+2a\ell-2a^2)$	$\frac{qb}{8}(4a+b)$		$\frac{qb}{2}$	$\delta_0 = \frac{q\ell^4}{384EI}\left\{\frac{8b}{\ell} - 4\left(\frac{b}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{b}{\ell}\right)^4\right\}$
 	$\frac{11}{192}q\ell^2$	$\frac{3}{32}q\ell^2$	$\frac{7q\ell^2}{192}$	$\frac{q\ell}{4}$	$\delta_0 = \frac{57q\ell^4}{6144EI}$

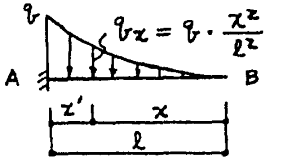
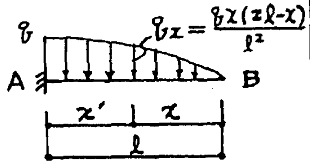
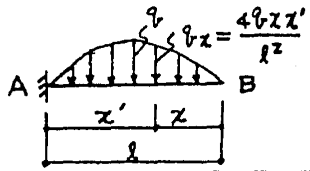
荷重状態	C	M_0	M_e	Q_0	δ_0 , δ_e
	$\frac{13}{324} q l^2$	$\frac{5}{72} q l^2$	$\frac{19}{648} q l^2$	$\frac{q l}{6}$	$\delta_0 = \frac{205 q l^4}{31104 EI}$
	$\frac{qb}{12l}(12mn - b^2)$	$(a+b) \leqq x_0 < (a+b+c)$ $\frac{qb}{2}(2a+b)$	$\frac{qb}{12l}(12m^2+b^2)$	qb	
	$\frac{q a^2}{6l}(3l-2a)$	$\frac{q a^2}{2}$	$\frac{q a^3}{3l}$	qa	$\delta_0 = \frac{8 q l^4}{384 EI}\left\{3\cdot\left(\frac{a}{l}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{a}{l}\right)^4\right\}$
	$\frac{5}{192} q l^2$	$\frac{q l^2}{32}$	$\frac{q l^2}{192}$	$\frac{q l}{4}$	$\delta_0 = \frac{23 q l^4}{6144 EI}$
	$\frac{7}{162} q l^2$	$\frac{q l^2}{18}$	$\frac{q l^2}{81}$	$\frac{q l}{3}$	$\delta_0 = \frac{25 q l^4}{3888 EI}$
	$C_A = \frac{Pab^2}{l^2}$ $C_B = \frac{Pa^2 b}{l^2}$	$\frac{Pab}{l}$	$\frac{Pab}{2l}$	$Q_A = \frac{Pb}{l}$ $Q_B = \frac{Pa}{l}$	$\delta_0 = \frac{Pl^3}{48EI}\left\{\frac{3a}{l} - 4\left(\frac{a}{l}\right)^3\right\}$ $\delta_e = \frac{Pa^3 b^3}{3EIl^3}$
	$\frac{Pl}{8}$	$\frac{Pl}{4}$	$\frac{Pl}{8}$	$\frac{P}{2}$	$\delta_0 = \frac{Pl^3}{48EI}$ $\delta_e = \frac{Pl^3}{192EI}$

荷重状態	C	M_o	M_e	Q_o	δ_o , δ_e
	$\frac{2}{9}Pl$	$\frac{Pl}{3}$	$\frac{Pl}{9}$	P	$\delta_o = \frac{23Pl^3}{648EI}$ $\delta_e = \frac{5Pl^3}{648EI}$
	$\frac{5}{16}Pl$	$\frac{Pl}{2}$	$\frac{3}{16}Pl$	$\frac{3}{2}P$	$\delta_o = \frac{19Pl^3}{384EI}$ $\delta_e = \frac{Pl^3}{96EI}$
	$\frac{2}{5}Pl$	$\frac{3}{5}Pl$	$\frac{Pl}{5}$	$2P$	
	$\frac{Pa}{l}(l-a)$	Pa	$\frac{Pa^2}{l}$	P	$\delta_o = \frac{Pa(3l^2-4a^2)}{24EI}$
	$\frac{3}{16}Pl$	$\frac{Pl}{4}$	$\frac{Pl}{16}$	P	$\delta_o = \frac{11Pl^3}{384EI}$
	$\frac{5}{36}Pl$	$\frac{Pl}{6}$	$\frac{1}{36}Pl$	P	$\delta_o = \frac{13Pl^3}{648EI}$
	$\frac{q}{12l}(l^3-2a^2l+a^3)$	$\frac{3l^2-4a^2}{24}\cdot q$	$\frac{q}{24l}(l^3-2a^3)$	$\frac{l-qa}{2}q$	$\delta_o = \frac{5ql^4}{384EI} - \frac{ql^2a^2}{48EI} + \frac{qa^4}{120EI}$

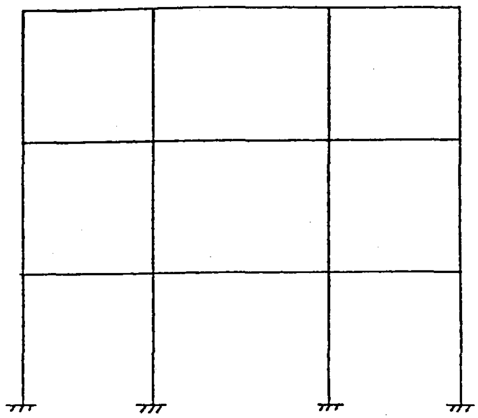
荷重状態	C	M_o	M_e	Q_o	δ_o , δ_e
	$\frac{5}{96} q\ell^2$	$\frac{1}{12} q\ell^2$ or $1.6C$	$\frac{q\ell^2}{32}$ or $0.6C$	$\frac{1}{4} q\ell$	$\delta_o = \frac{q\ell^4}{120EI}$
	$\frac{17}{384} q\ell^2$	$\frac{q\ell^2}{16}$	$\frac{7}{384} q\ell^2$	$\frac{1}{4} q\ell$	$\delta_o = \frac{7 q\ell^4}{1024EI}$
	$\frac{37}{864} q\ell^2$	$\frac{7}{108} q\ell^2$	$\frac{19}{864} q\ell^2$	$\frac{1}{4} q\ell$	$\delta_o = \frac{259 q\ell^4}{38880EI}$
	$\frac{65}{1536} q\ell^2$	$\frac{1}{16} q\ell^2$	$0.47C$	$\frac{1}{4} q\ell$	$\delta_o = \frac{27 q\ell^4}{4096EI}$
	$\frac{1}{32} q\ell^2$	$\frac{1}{24} q\ell^2$	$\frac{1}{96} q\ell^2$	$\frac{1}{4} q\ell$	$\delta_o = \frac{3 q\ell^4}{6400EI}$
	$C_A = \frac{1}{20} q\ell^2$ $C_B = \frac{1}{30} q\ell^2$	$\frac{1}{9\sqrt{3}} q\ell^2$		$Q_A = \frac{2}{3} q\ell$ $Q_B = \frac{1}{3} q\ell$	$x = 0.591\ell$ $\delta_o = 0.00652 \frac{q\ell^4}{EI}$ $x = 0.525\ell$ $\delta_o = 0.001309 \frac{q\ell^4}{EI}$
	$C_A = \frac{q\ell^2}{60}\left(\frac{a}{\ell}\right)^3\left(5 - 3\frac{a}{\ell}\right)$ $C_B = \frac{q\ell^2}{60}\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\left\{10\left(1-\frac{a}{\ell}\right)+3\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\right\}$			$Q_A = \frac{q\ell}{20}\left(\frac{a}{\ell}\right)^3\left(5-2\frac{a}{\ell}\right)$ $Q_B = \frac{q\ell}{20}\left(\frac{a}{\ell}\right)\left\{10-\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \cdot\left(5-2\frac{a}{\ell}\right)\right\}$	

荷重状態	C	M_0	M_e	Q_0	δ_0 , δ_e
	$C_A = \frac{7}{960} q\ell^2$ $C_B = \frac{23}{960} q\ell^2$	$x_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$ $\frac{q\ell^2}{48}\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{9}\right)$		$Q_A = \frac{q\ell}{24}$ $Q_B = \frac{5}{24} q\ell$	$x = 0.4447\,\ell$ $\delta_0 = 0.0023\,\frac{q\ell^4}{EI}$
	$C_A = \frac{q\ell^2}{20}\left(\frac{a}{\ell}\right)^3\left(5 - 4\frac{a}{\ell}\right)$ $C_B = \frac{q\ell^2}{30}\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\left\{10 - 15\frac{a}{\ell} + 6\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\right\}$			$Q_A = \frac{q\ell}{20}\left(\frac{a}{\ell}\right)^3\left(15 - 8\frac{a}{\ell}\right)$ $Q_B = \frac{q\ell}{20}\left(\frac{a}{\ell}\right)\left\{10 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \cdot \left(15 - 8\frac{a}{\ell}\right)\right\}$	
	$C_A = \frac{3}{160} q\ell^2$ $C_B = \frac{1}{30} q\ell^2$	$x_0 = \frac{\sqrt{6}}{6}\ell$ $\frac{\sqrt{6}}{54} q\ell^2$		$Q_A = \frac{1}{12} q\ell$ $Q_B = \frac{1}{6} q\ell$	$x = 0.4676\,\ell$ $\delta_0 = 0.00419\,\frac{q\ell^4}{EI}$
	$C_A = \frac{M}{\ell^2} b(2a - b)$ $C_B = \frac{M}{\ell^2} a(2b - a)$	$\frac{a}{\ell}M$ or $\frac{b}{\ell}M$ 		$\frac{M}{\ell}$	$\delta_0 = \frac{Mab(a-b)}{3EI}$
	$M_A = P\ell$			P	$\frac{P\ell^3}{3EI}$
	$M_A = Pa$			P	$\frac{Pa^3}{3EI}\left(1 + \frac{3b}{2a}\right)$
	$M_A = \frac{q\ell^2}{2}$			$q\ell$	$\frac{q\ell^4}{8EI}$

荷重状態	C	Mo	Me	Qo	δo , δe
	$M_A = \frac{qb}{2}(l+a)$			qb	$\frac{qb}{24EI}(b^3-6bl^2+8l^3)$
	$M_A = \frac{ql^2}{6}$			$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^4}{30EI}$
	$M_A = \frac{ql^2}{3}$			$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^4}{15EI}$
	$M_A = \frac{(2q_1+q_2)}{6}l^2$			$\frac{(q_1+q_2)}{2}l$	$\frac{q_1l^4}{8EI} + \frac{q_2l^4}{30EI}$
	$M_A = \frac{qb}{6}(l+2a)$			$\frac{qb}{2}$	$\frac{qb}{30EI}(b^3-5bl^2+5l^3)$
	$M_A = \frac{qb}{6}(2l+a)$			$\frac{qb}{2}$	$\frac{qb}{60EI}(10l^3-b^3-5bl^2)$
	$M_A = \frac{ql^2}{4}$			$\frac{ql}{2}$	$\frac{11wl^4}{192EI}$

荷重状態	C	M_o	M_e	Q_o	δ_o , δ_e
	$M_A = \frac{ql^2}{12}$			$\frac{ql}{3}$	
	$M_A = \frac{ql^2}{4}$			$\frac{2ql}{3}$	
	$\frac{ql^2}{3}$			$\frac{2ql}{3}$	

3・3　剛比とは



図－3・4

左図の様な不静定ラーメンの応力を固定法あるいは撓角法に依って求める場合，柱や梁の各々の部材の剛度を求める必要がある。

部材の剛度（relative stiffness）は次式で求める。

$$K = \frac{I}{l} \qquad \text{------ (3・1)}$$

I：部材の断面2次モーメント
l：部材の長さ

各部材の剛性を比較するには剛度の比で分るが，同じ剛度の部材が多い場合はその部材を標準剛度（K_0）にとれば，より簡単に剛性の比較をみる事が出来る。

従って標準剛度はその骨組にとって便利な数値に決めればよい。

部材の剛比（relative stiffness ratio）は次式で求められる。

$$k = \frac{K}{K_0} \qquad \text{------ (3・2)}$$

k：剛比
K：剛度
K_0：標準剛度

例題 3・1)　下図のラーメンの剛比を求めよ。

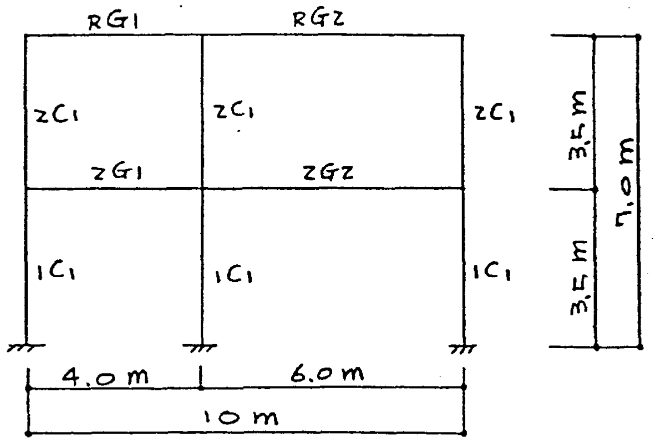


図 − 3・5 (a)

断面はH形鋼とする。

RG1　H − 194 × 150 × 6 × 9
(I_x = 2690 cm^4)

RG2 }
2G1 }　H − 250 × 125 × 6 × 9
(I_x = 4050 cm^4)

2G2　H − 300 × 150 × 6.5 × 9
(I_x = 7210 cm^4)

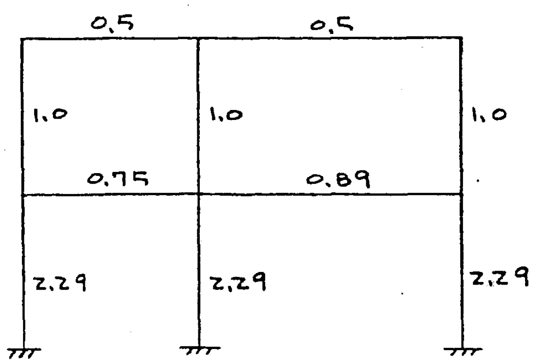
2C1　H − 200 × 200 × 8 × 12
(I_x = 4720 cm^4)

1C1　H − 250 × 250 × 9 × 14
(I_x = 10800 cm^4)

(解)　2C1 のKを K_o として計算する。

(K_o = 13.486 cm^3)

部材	I (cm^4)	l (cm)	K (cm^3)	k
RG1	2690	400	6.725	0.5
RG2	4050	600	6.75	0.5
2G1	4050	400	10.125	0.75
2G2	7210	600	12.017	0.89
2C1	4720	350	13.486	1.0
1C1	10800	350	30.857	2.29



剛比一覧

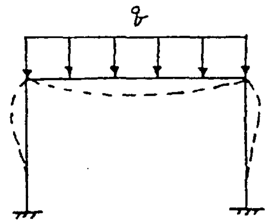
図 − 3・5 (b)

第4章　固定モーメント法（moment distribution method）

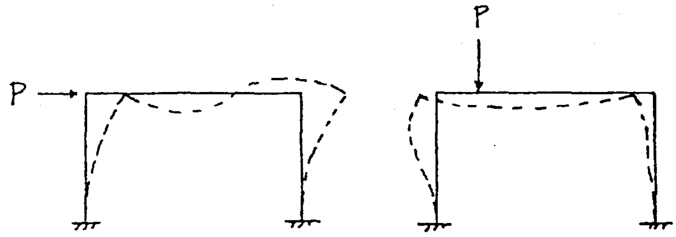
4・1　概説

不静定ラーメンの中でも特に節点の移動しないラーメンの応力をこの章では固定モーメント法で求める。

実社会に於て均等ラーメンで均等荷重の鉛直荷重時応力の算定はこの方法で求めている場合が多い。



節点が移動しない
門形ラーメン
図－4・1



節点が移動する
門形ラーメン
図－4・2

節点が移動するラーメンを固定モーメント法で求めるにはラーメンの変形を考慮しなければならない。その方法は松本崇著「異形ラーメンと固定モーメント法」：理工図書，を参照されたい。

4・2　解法順序

固定法は機械的作表法であるから次の手順に従って計算する。

(1) 荷重の加わっている部材の固定端モーメント（F.E.M）を求める。

(2) 介配率（D.F : distribution factor）

ラーメンの節点に接合される部材の剛比の割合を計算する。

(3) 分配モーメント（D：distribution moment）を求める。

ラーメンの節点に生ずる固定端モーメントの不釣合いモーメントを分配率に応じて分配する。

但し符号は不釣合いモーメントと反対とする。

(4) 到達モーメント（C：carry over moment）を求める。

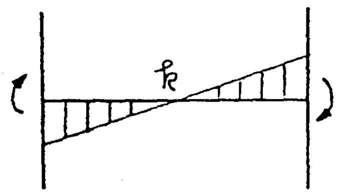
部材の端部に生じたモーメントが他端に伝達されるモーメントを計算する。

(5) 以下分配モーメント（D）と到達モーメント（C）をくり返して求める。

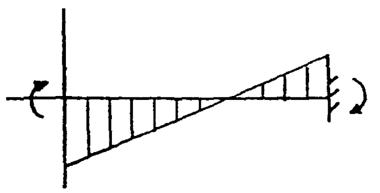
一般の構造計算では2・3回程度くり返せばほゞ近似解を得る。

4・3　有効剛比（effective relative stiffness ratio）

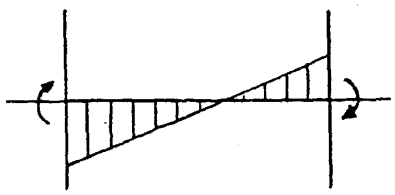
部材の変形性状（対称 or 逆対称等）や支持状態等によって剛比を修正するものである。有効剛比を（k_e）で表わす。



逆対称変形部材　　$k_e = 1.5k$

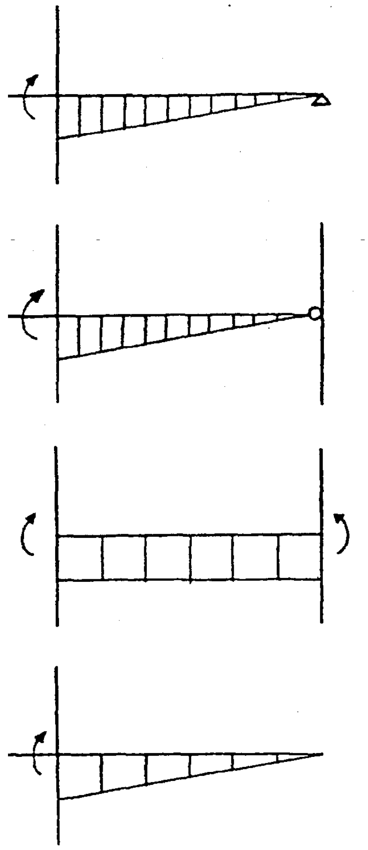


他端固定の部材



一般ラーメンの部材

他端固定の部材・一般ラーメンの部材：$k_e = k$



他端がヒンジの部材

他端がピンの部材

$k_e = \frac{3}{4}k = 0.75k$

対称に変形する部材　$k_e = \frac{1}{2}k = 0.5k$

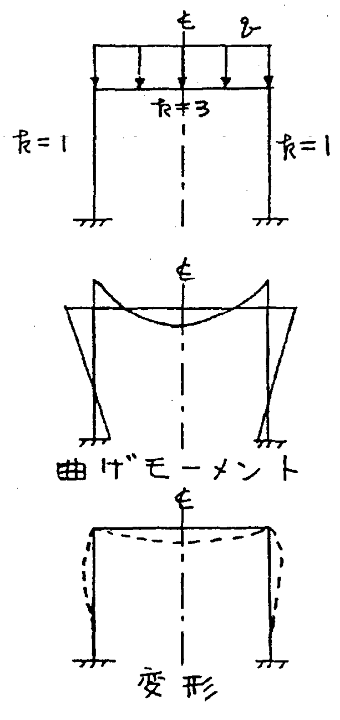
他端が自由の部材　$k_e = 0$

図－4・3

有効剛比は斉藤謙次著「建築構造力学」：理工図書を参照した。

補　足

対称変形部材の例



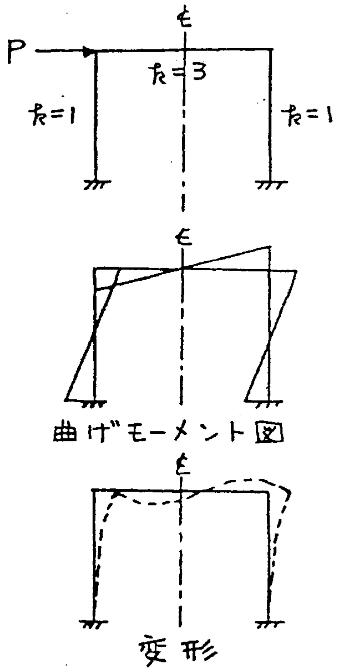
図－4・4

左図の様に骨組み荷重共称なラーメンを考えると変形は対称変形となる。

同じ骨組みで梁の中央に集中荷重を受けた場合も同様である。

この様な対称変形をするラーメンを固定法で解く場合は梁に有効剛比（$k_e = 0.5k = 1.5$）を用いて，左半分あるいは右半分だけ解けばよい。

逆対称変形部材の例



図－4・5

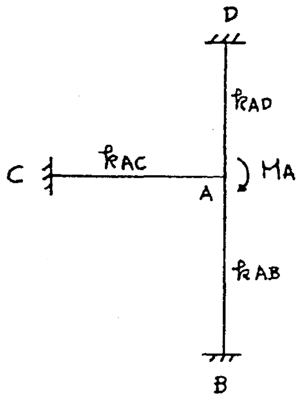
左図の様な骨組みが対称なラーメンに水平荷重が作用した場合を考える。

この場合梁は逆対称変形をするので梁に有効剛比（$k_e = 1.5k = 4.5$）を用いて，左半分あるいは右半分を解けばよい。

但しこの場合は節点（柱頭）が移動するのでこの章での解法の対象ではない。

この様なラーメンのを固定法で求める場合は先に述べた文献を参照されたい。

4・4　分配モーメントと到達モーメント



図－4・6

左図の如きラーメンのA点に M_A なるモーメントが作用する場合を考える。

材端モーメントを次の様に表わす。

M_{AB}	：	A－B部材のA端のモーメント
M_{AC}	：	A－C　〃
M_{AD}	：	A－D　〃
M_{BA}	：	A－B部材のB端のモーメント
M_{CA}	：	A－C　〃　C　〃
M_{DA}	：	A－D　〃　D　〃

節点に作用するモーメントはその節点に集まる部材の剛比の比（分配率：D.F）で分配される。

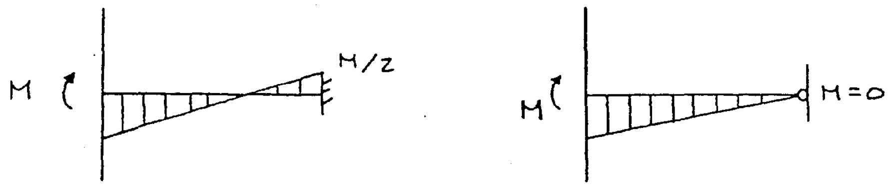
$$M_{AB} = \frac{k_{AB}}{\Sigma k} \times M_A = \frac{k_{AB}}{k_{AB} + k_{AC} + k_{AD}} \times M_A \qquad \text{------ (4・1)}$$

$$M_{AC} = \frac{k_{AC}}{\Sigma k} \times M_A \qquad \text{------ (4・2)}$$

$$M_{AD} = \frac{k_{AD}}{\Sigma k} \times M_A \qquad \text{------ (4・3)}$$

材端にモーメントMが生じた時，他端にはそのモーメントの1/2が到達する。

但し他端がピンの時は当然到達モーメントはない。



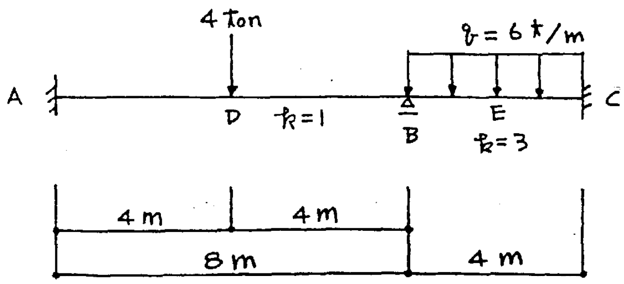
図－4・7

従って図－4・6における固定端に生ずるモーメントはその部材の他端のモーメントの1/2が到達するので次式で表わされる。

$$\left.\begin{aligned} M_{BA} &= \frac{M_{AB}}{2} \\ M_{CA} &= \frac{M_{AC}}{2} \\ M_{DA} &= \frac{M_{AD}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{------}(4\cdot4)$$

固定法は機械的作表法であるため，先に述べた解法順序に従って例題中で理解されたい。

(例題 4・1)　図の連続梁のモーメント図を固定モーメント法で求めよ。



図－4・8 (a)

(解)　部材の C, M_0, Q_0を求める。（Page 50の表－3.1 参照）

A － B部材

$$\left[\begin{aligned} C_{AB} &= -\frac{Pl}{8} = -\frac{4\times 8}{8} = -4\ \mathrm{tm} = -C_{BA} \\ M_0 &= \frac{Pl}{4} = \frac{4\times 8}{4} = 8\ \mathrm{tm} \\ Q_0 &= \frac{P}{2} = \frac{4}{2} = 2\ \mathrm{ton} \end{aligned}\right.$$

B － C部材

$$\left[\begin{aligned} C_{BC} &= -\frac{wl^2}{12} = -\frac{6\times 4^2}{12} = -8\ \mathrm{t\cdot m} = -C_{CB} \\ M_0 &= \frac{wl^2}{8} = \frac{6\times 4^2}{8} = 12\ \mathrm{tm} \\ Q_0 &= \frac{wl}{2} = \frac{6\times 4}{2} = 12\ \mathrm{ton} \end{aligned}\right.$$

	M_{AB}		M_{BA}	M_{BC}		M_{CB}	
D.F	—		0.25	0.75		—	分配率
F.E.M	−4	$\frac{1}{2}$到達	4	−8	$\frac{1}{2}$到達	8	固定端モーメント
D_1	—		1.0	3.0		—	分配モーメント
C_1	0.5		—	—		1.5	到達モーメント
D_2	—		—	—		—	分配モーメント
C_2	—	Σ	5.0	−5.0	C_2	—	到達モーメント
Σ	−3.5				Σ	9.5	

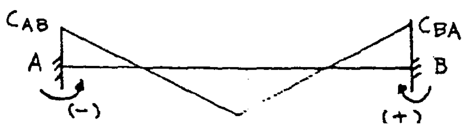
図－4.8 (b)

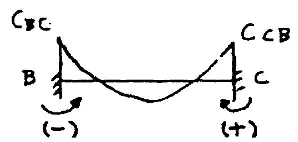
計算順序

(1) まず上図の如き図表を作成する。

(2) 分配率（D.F）の計算を行う。
A端C端は固定であるから分配率は0である。
B点における BA部材の分配率は 1/1+3 = 0.25
〃　　BC　　〃　　3/1+3 = 0.75

(3) 固定端モーメント（F.E.M）には最初に計算したCの値を用いる。　符号は下図による





(4) 分配モーメント (D_1) を計算する。

A端C端は固定であるから分配モーメントはない。

B点では F.E.M をみると −4t·m の不釣合いモーメントが生じている。節点のモーメントは釣合っていなければならないので +4tm を BA・BC 部材に負担させる。

従って　BA 部材の D_1 は　$4 \times 0.25 = 1$ tm

　　　　BC　〃　　　$4 \times 0.75 = 3$ tm　　となる。

すなはち不釣合いモーメントの符号を変えて分配率に乗ずれば D_1 が求まる。

(5) 到達モーメント C_1 を計算する。

AB 部材の C_1 は	BA 部材の D_1 の	1/2 であるから	0.5
BA　〃	AB	〃	0
BC　〃	CB	〃	0
CB　〃	BC	〃	1.5

(6) 分配モーメント (D_2) を計算する

A端C端は固定であるから分配モーメントはない。

B点では C_1 が0で釣合っているので分配モーメントはない。

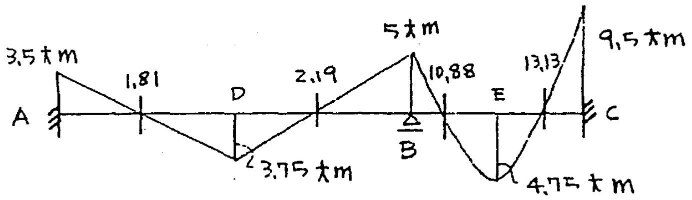
この様な状態を収斂したといい計算は終了する。

収斂しない場合は C_2, D_3, C_3, D_4 と計算をくり返すと精解に近づいていく。

尚，計算は一般部分はDで，固定端はCで終る様にする。

(8) モーメントの Σ は F.E.M から下の合計である。

モーメント図を求める



図−4・8 (c)

中央のモーメント

$$M_D = M_0 - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{2} = 8 - \frac{3.5+5}{2} = 3.75 \text{ tm}$$

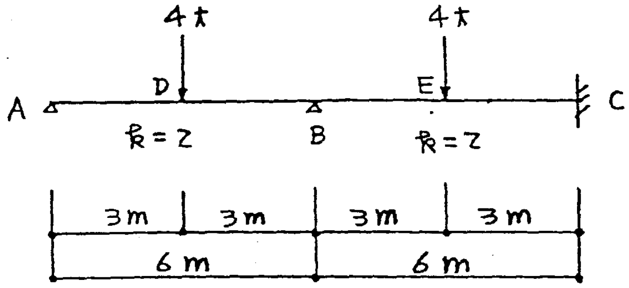
$$M_E = M_0 - \frac{M_{BC} + M_{CB}}{2} = 12 - \frac{5+9.5}{2} = 4.75 \text{ tm}$$

せん断力

$$Q_{AB} = Q_0 \pm \frac{|M_{AB} - M_{BA}|}{\ell} = 2 \pm \frac{5-3.5}{8} = 2.19\text{ t}, 1.81\text{ t}$$

$$Q_{BC} = Q_0 \pm \frac{|M_{BC} - M_{CB}|}{\ell} = 12 \pm \frac{9.5-5}{4} = 13.13\text{ t}, 10.88\text{ t}$$

（例題 4-2）　図の連続梁のモーメント図を固定モーメント法で求めよ。



図－4・9 (a)

（解）　C, M_0, Q_0 の計算

A－B 部材

A 端がピンであるから　$C_{AB} = 0$　とする。

A 端ピンの時の B 端の固定端モーメントには

$$H_{BA} = C_{BA} - \frac{1}{2} C_{AB} \qquad \text{------ (1)}$$

として求める。（理由は撓角法の章を参照）

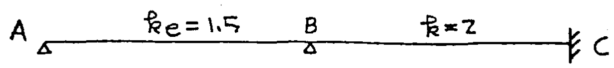
対称荷重の時は　$H_{BA} = 1.5\,C_{BA}$　となる。

$$\begin{cases} C_{AB} = 0 \\ H_{BA} = 1.5 \times \dfrac{Pl}{8} = 1.5 \times \dfrac{4 \times 6}{8} = 4.5\ \mathrm{tm} \\ M_0 = \dfrac{Pl}{4} = \dfrac{4 \times 6}{4} = 6\ \mathrm{tm} \\ Q_0 = \dfrac{P}{2} = \dfrac{4}{2} = 2\ \mathrm{ton} \end{cases}$$

B－C 部材

$$\begin{cases} C_{BC} = -\dfrac{Pl}{8} = -\dfrac{4 \times 6}{8} = -3\ \mathrm{tm} = -C_{CB} \\ M_0 = \dfrac{Pl}{4} = 6\ \mathrm{tm} \\ Q_0 = \dfrac{P}{2} = 2\ \mathrm{ton} \end{cases}$$

A－B 部材は A 端がピンだから　$k_e = 0.75\,k = 1.5$　とする。



	M_{AB}	M_{BA}	M_{BC}	M_{CB}
D.F	—	0.43	0.57	—
F.E.M	—	4.5	−3	3
D_1	—	−0.65	−0.85	—
C_1	—	—	—	−0.43
D_2	—	—	—	—
C_2				—
Σ	0	3.85	3.85	2.57

図－4・9 (b)

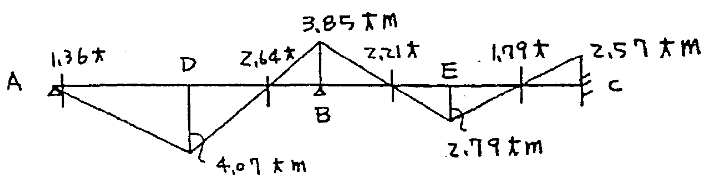
計算順序

(1) 分配率（D.F）を計算する。
A－B部材の終端Aがピンであるから有効剛比を用いて計算する。

(2) 固定端モーメント（F.E.M）を計算する。
A－B部材はA端がピンであるからB端の固定端モーメントには先に述べた様に H_{BA} の式を用いる。

(3) 分配モーメント（D_1）を計算する。
B点のF.E.Mに1.5tmの不釣合いモーメントが生じているので符号を変えて分配率に乗じて求める。

(4) 到達モーメント（C_1）
A点はピンであるから M_{AB} に到達モーメントはない。



中央のモーメント

$$M_D = M_0 - \frac{M_{AB}+M_{BA}}{2} = 6 - 1.93 = 4.07\ \text{tm}$$

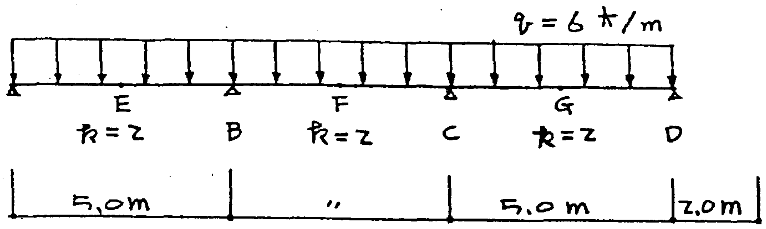
$$M_E = M_0 - \frac{M_{BC}+M_{CB}}{2} = 6 - 3.21 = 2.79\ \text{tm}$$

せん断力

$$Q_{AB} = Q_0 \pm \frac{|M_{AB}-M_{BA}|}{l} = 2 \pm 0.64 = 2.64\ \text{t},\ 1.36\ \text{t}$$

$$Q_{BC} = Q_0 \pm \frac{|M_{BC}-M_{CB}|}{l} = 2 \pm 0.21 = 2.21\ \text{t},\ 1.79\ \text{t}$$

（例題 4·3）　図の連続梁のモーメント図を固定モーメント法で求めよ。



図－4·10 (a)

(解)　計算上の注意

(1) 正対称変形の連続梁であるから，B－C部材に有効剛比を用いて左半分だけ解く。 $k_e = 0.5k = 1.0$

(2) A点はピンであるから，A－B部材に有効剛比を用いる。 $k_e = 2 \times 0.75 = 1.5$

(3) A－B部材の固定端モーメントについて。
A－B部材のA端の固定端モーメントはピンであるから0である。
B端の固定端モーメントはA端はピンであるから H_{BA} を用いる。

C, M_0, Q_0 の計算

A－B部材

$$C_{AB} = 0$$

$$M_0 = \frac{q l^2}{8} = \frac{6 \times 5^2}{8} = 18.75\ \mathrm{tm}$$

$$Q_0 = \frac{q l}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15\ \mathrm{ton}$$

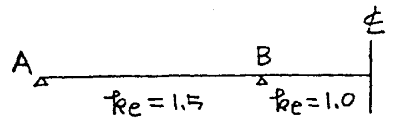
$$H_{BA} = C_{BA} - \frac{1}{2} C_{AB} = 1.5\, C_{BA} = 1.5 \cdot \frac{6 \times 5^2}{12} = 18.75\ \mathrm{tm}$$

B－C部材

$$C_{BC} = -\frac{q l^2}{12} = -\frac{6 \times 5^2}{12} = -12.5\ \mathrm{tm}$$

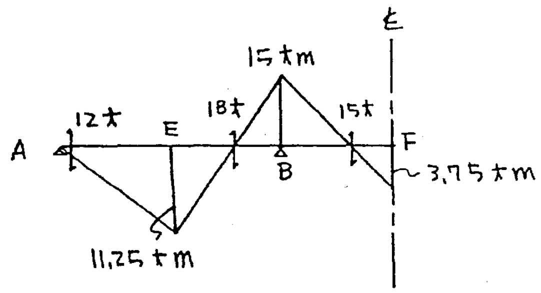
$$M_0 = \frac{q l^2}{8} = \frac{6 \times 5^2}{8} = 18.75\ \mathrm{tm}$$

$$Q_0 = \frac{q l}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15\ \mathrm{ton}$$



	M_{AB}	M_{BA}	M_{BC}
D.F	—	0.6	0.4
F.E.M	—	18.75	-12.5
D_1	—	-3.75	-2.5
C_1	—	—	—
D_2	—	—	—
Σ	0	15	-15

図－4・10（b）



中央のモーメント

$$M_E = M_0 - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{2} = 18.75 - 7.5 = 11.25\ \mathrm{tm}$$

$$M_F = M_0 - \frac{2M_{BC}}{2} = 18.75 - 15 = 3.75\ \mathrm{tm}$$

せん断力

$$Q_{AB} = Q_0 \pm \frac{|M_{AB} - M_{BA}|}{\ell} = 15 \pm 3 = 18\mathrm{t},\ 12\mathrm{t}$$

$$Q_{BC} = Q_0 \pm \frac{|M_{BC} - M_{CB}|}{\ell} = 15\mathrm{t}$$

（例題 4・4）　図の連続梁のモーメント図を固定モーメント法で求めよ

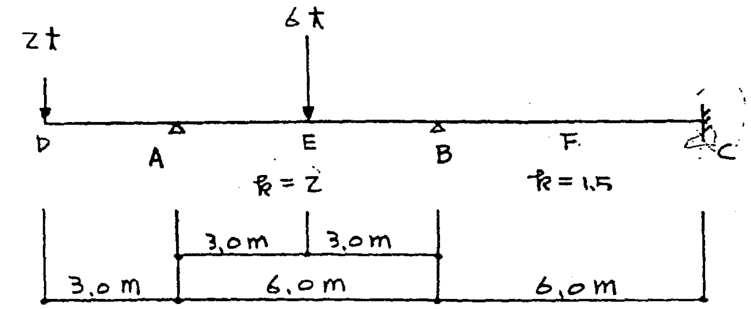


図 − 4・11 (a)

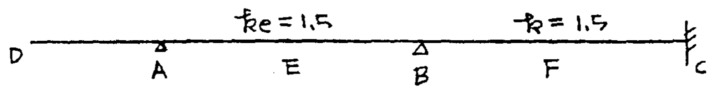
（解）　C, M_0, Q_0 の計算

片持梁

$$\begin{cases} M_A = P\cdot l = 2\cdot 3 = 6\ \mathrm{tm} \\ Q = P = 2\ \mathrm{ton} \end{cases}$$

A − B 部材

$$\begin{cases} C_{AB} = 0 \\ M_0 = \dfrac{Pl}{4} = \dfrac{6\times 6}{4} = 9.0\ \mathrm{tm} \\ Q_0 = \dfrac{P}{2} = 3\ \mathrm{ton} \\ H_{BA} = C_{BA} - \dfrac{1}{2}C_{AB} = 1.5\ C_{AB} = 1.5\cdot\dfrac{Pl}{8} = 1.5\cdot\dfrac{6\times 6}{8} = 6.75\ \mathrm{tm} \end{cases}$$



	M_{AD}	M_{AB}	M_{BA}	M_{BC}		M_{CB}
D.F	—	—	0.5	0.5		—
F.E.M	6	—	6.75	—		—
D_1	—	−6	−3.375	−3.375		—
C_1	—	—	−3	—		−1.688
D_2	—	—	1.5	1.5		—
Σ	6	−6	1.875	−1.875	C_2	0.75
					Σ	−0.938

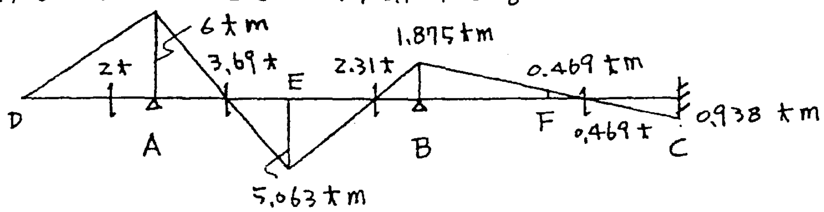
図 − 4・11 (b)

計算上の注意

(1) A節点のF.E.Mに6tmの不釣合いモーメントが生じているのでM_{AB}のD_1に-6tmを加える。

(2) M_{AB}のC_1はA点がピンだからM_{EA}のD_1からの到達モーメントはない。

(3) C端は固定である。この様な時はM_{BC}のD_2にモーメントがある場合はC_2まで計算する。



図－4・11(C)

中央のモーメント

$$M_E = 9.0 - \frac{6+1.875}{2} = 5.063\ \text{tm}$$

$$M_F = \frac{1.875-0.938}{2} = 0.469\ \text{tm}$$

せん断力

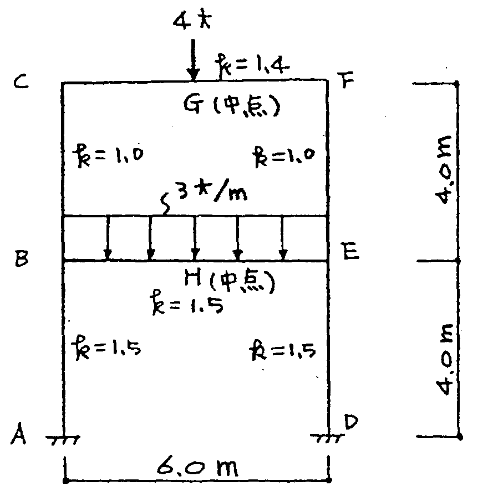
$$Q_{AD} = 2\ \text{ton}$$

$$Q_{AB} = 3 \pm \frac{6-1.875}{6} = 3.69\text{t},\ 2.31\text{t}$$

$$Q_{BC} = \frac{1.875+0.938}{6} = 0.469\text{t}$$

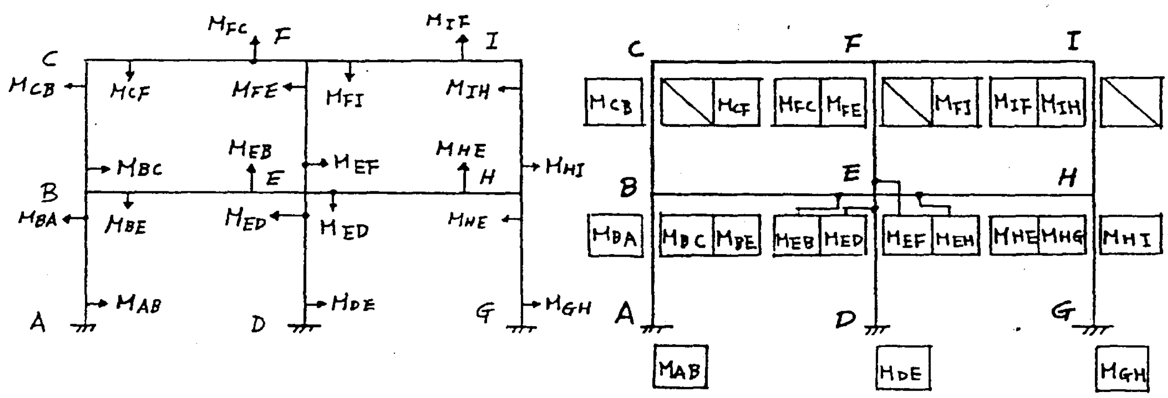
B－C部材はモーメントが直線的で符号が変る。この様なモーメント勾配をするせん断力は，部材両端の材端モーメントを加算して梁の長さで除すればよい。

（例題 4・4） 左図のラーメンのモーメント図を固定モーメント法で求めよ。



図－4・12（a）

（解）
ラーメンの場合材端モーメントの数値は時計回りに記入する。尚，固定モーメント法の計算位置も下図に示す。



材端モーメント記入位置（b）　　材端モーメント計算位置（c）

図－4・12

対称変形をするから梁に有効剛比を用い，左半分だけ計算する。　C-F $k_e = 0.5k = 0.7$，B-E $k_e = 0.5k = 0.75$

C，M_0，Q_0 の計算

C－F 部材

$$C_{CF} = -\frac{4\times6}{8} = -3\,\text{tm}$$

$$M_0 = \frac{4\times6}{4} = 6\,\text{tm}$$

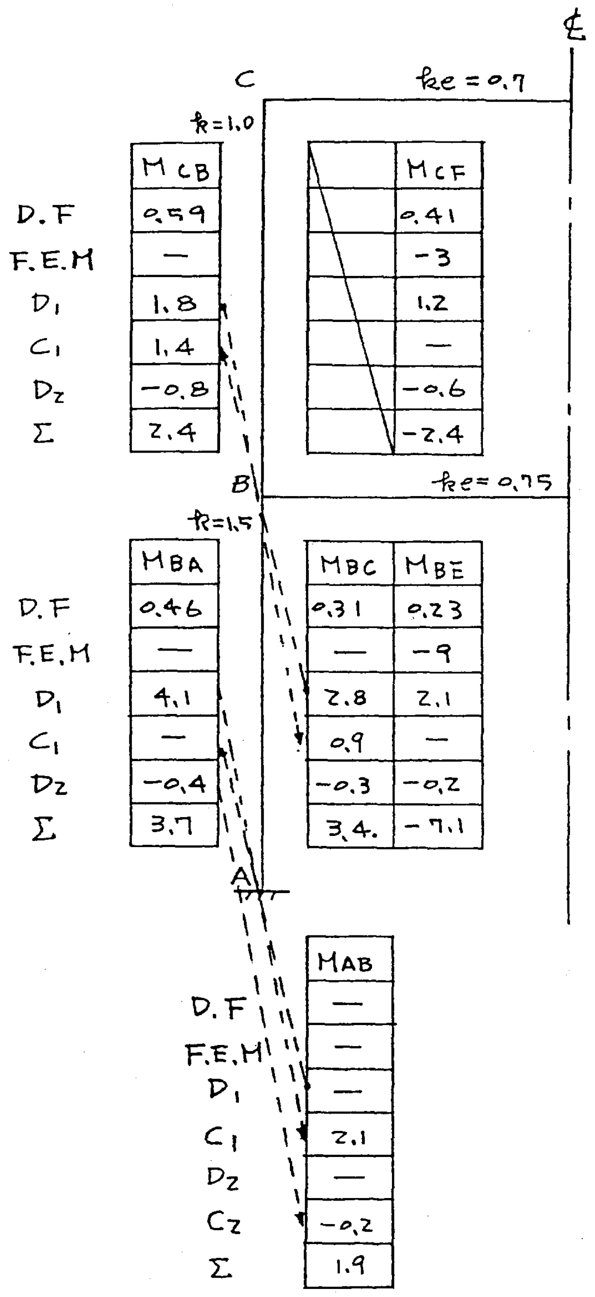
$$Q_0 = \frac{4}{2} = 2\,\text{ton}$$

B－E 部材

$$C_{BE} = -\frac{3\times6^2}{12} = -9\,\text{tm}$$

$$M_0 = \frac{3\times6^2}{8} = 13.5\,\text{tm}$$

$$Q_0 = \frac{3\times6}{2} = 9\,\text{ton}$$



	M_{CB}	M_{CF}
D.F	0.59	0.41
F.E.M	—	-3
D_1	1.8	1.2
C_1	1.4	—
D_2	-0.8	-0.6
Σ	2.4	-2.4

	M_{BA}	M_{BC}	M_{BE}
D.F	0.46	0.31	0.23
F.E.M	—	—	-9
D_1	4.1	2.8	2.1
C_1	—	0.9	—
D_2	-0.4	-0.3	-0.2
Σ	3.7	3.4.	-7.1

	M_{AB}
D.F	—
F.E.M	—
D_1	—
C_1	2.1
D_2	—
C_2	-0.2
Σ	1.9

梁中央のモーメント

$M_G = 6 - 2.4 = 3.6$ tm

$M_H = 13.5 - 7.1 = 6.4$ tm

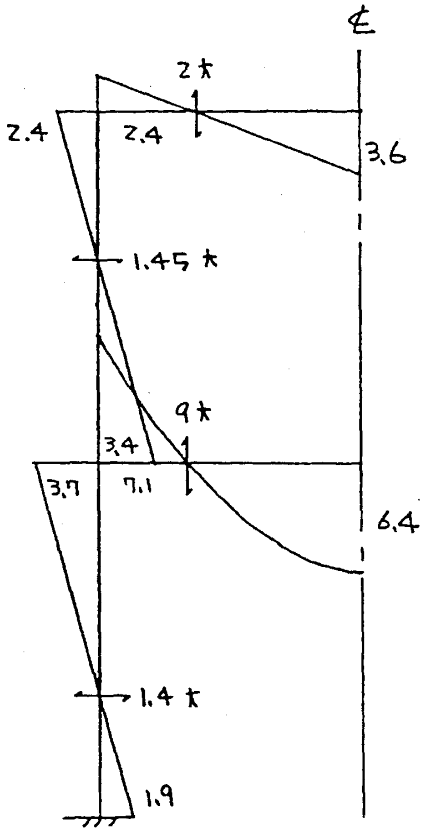
梁のせん断力は両端にモーメント勾配がないからQ_0である。

柱のせん断力はモーメントが直線的であるから次式で求める。

$$Q_c = \frac{M_{柱頭} + M_{柱脚}}{柱の長さ} \quad \text{------ (2)}$$

$$Q_{AB} = \frac{3.7 + 1.9}{4} = 1.4\ t$$

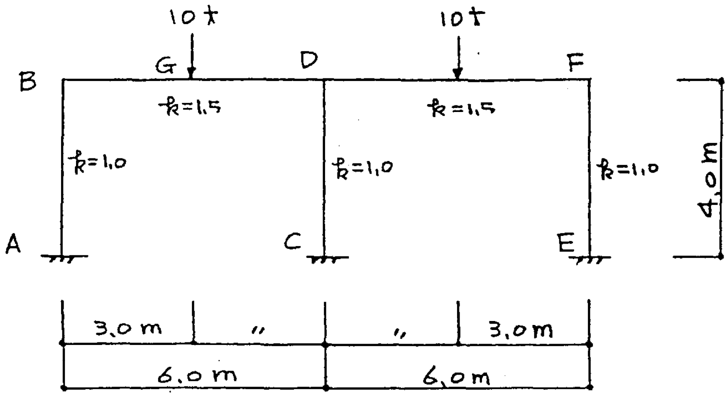
$$Q_{BC} = \frac{2.4 + 3.4}{4} = 1.45\ t$$



図－4・12 (e)

注）（例題 4・3）に述べたが M_{BA} の D_2 の項にモーメントがあるので M_{AB} は C_2 まで求める必要がある。
この例題ではまだ完全に収斂していないが，D_2，D_3 ‥‥とくり返す程精算値に近づく。

（例題 4・5）　図のラーメンのモーメント図を固定モーメント法で求めよ。

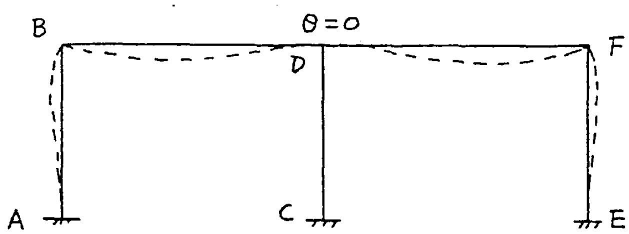


図－4・13 (a)

（解）　D－E 柱を中心に荷重，ラーメンが対称である。D節点のたわみ角 θ＝0 である。従ってこの様なラーメンはD点を固定にして半分だけ解けばよい。

C, M_0, Q_0 の計算

$$
\left[
\begin{aligned}
C_{BD} &= -\frac{10\times 6}{8} = -7.5\ \text{tm}\\
M_0 &= \frac{10\times 6}{4} = 15\ \text{tm}\\
Q_0 &= \frac{10}{2} = 5\ \text{t}
\end{aligned}
\right.
$$



図－4・13 (b)

B　$k=1.5$　D

$k=1.0$　A

	M_{BA}	M_{BD}	M_{DB}	M_{AB}
D.F	0.4	0.6	—	—
F.E.M	—	−7.5	7.5	—
D_1	3.0	4.5	—	—
C_1	—	—	3.75	1.5
D_2	—	—	—	—
C_2			—	—
Σ	3.0	−3.0	11.25	1.5

図－4・13（c）

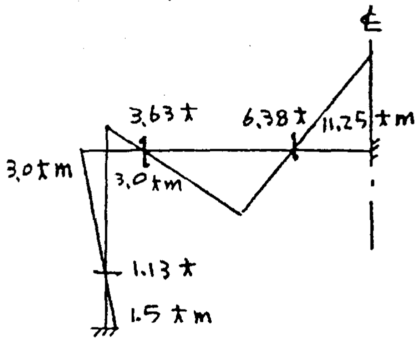
中央のモーメント

$$M_G = 15 - \frac{3+11.25}{2} = 7.88\ tm$$

せん断力

$$Q_{B\text{-}D} = 5 \pm \frac{11.25-3}{6} = 6.38\ t,\ 3.63\ t$$

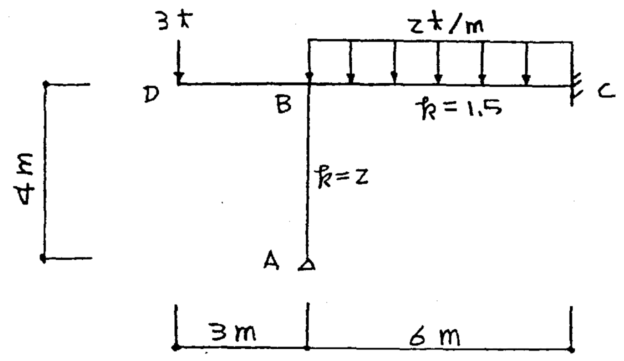
$$Q_{AB} = \frac{3+1.5}{4} = 1.13\ t$$



図－4・13（d）

柱 C－D には当然曲げモーメントは生じない。

（例題 4·6）　図のラーメンのモーメント図を固定モーメント法で求めよ。



図－ 4·14 (a)

（解）　A端はピンであるからA－B材に有効剛比を用いる。
$k_e = 2 \times 0.75 = 1.5$

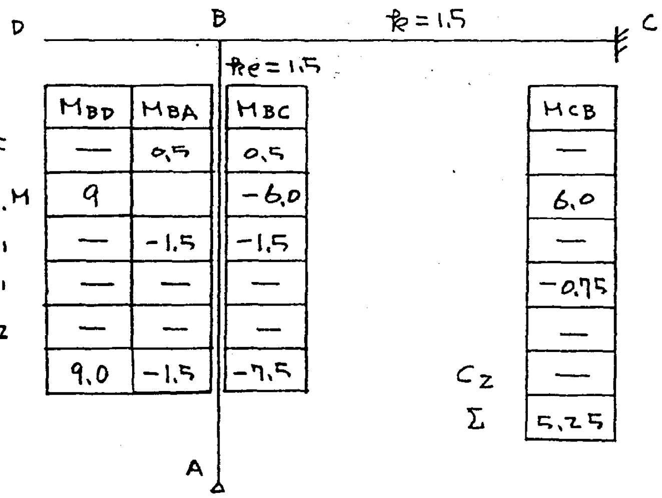
C, M_0, Q_0 の計算

B－D材

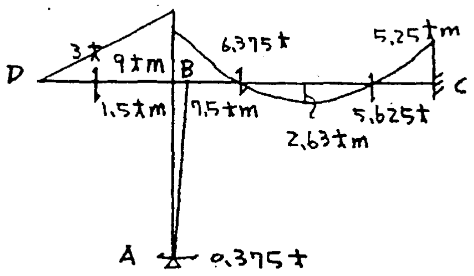
$$\begin{cases} M = 3 \times 3 = 9.0 \text{ tm} \\ Q = 3.0 \text{ t} \end{cases}$$

B－C材

$$\begin{cases} C_{BC} = -\dfrac{2 \times 6^2}{12} = -6 \text{ tm} = -C_{CB} \\ M_0 = \dfrac{2 \times 6^2}{8} = 9 \text{ tm} \\ Q_0 = \dfrac{2 \times 6}{2} = 6 \text{ ton} \end{cases}$$



	M_{BD}	M_{BA}	M_{BC}	M_{CB}
D.F	—	0.5	0.5	—
F.E.M	9		−6.0	6.0
D_1	—	−1.5	−1.5	—
C_1	—	—	—	−0.75
D_2	—	—	—	—
C_2				—
Σ	9.0	−1.5	−7.5	5.25



図－4・14 (b)

B－C部材中央のモーメント

$$M = 9 - \frac{7.5+5.25}{2} = 2.63 \text{ tm}$$

せん断力

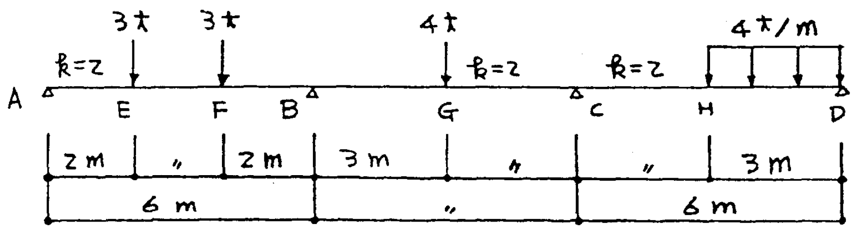
$$Q_{BD} = 3 \text{ t}$$

$$Q_{AB} = \frac{1.5}{4} = 0.375 \text{ t}$$

$$Q_{BC} = 6 \pm \frac{7.5-5.25}{6} = 6.375 \text{ t}, 5.625 \text{ t}$$

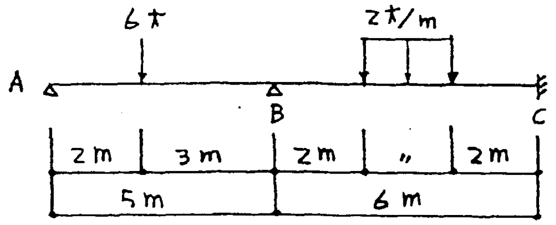
―― 練　習　問　題 ――

(問題4・1) 図の連続梁のモーメント図を固定モーメント法で求めよ。



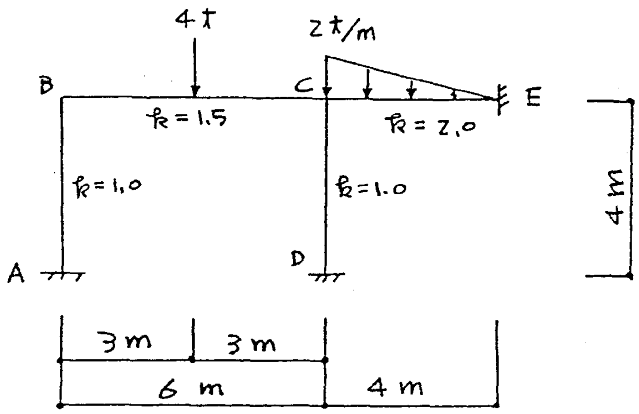
図－4・15

(問題4・2) 図の連続梁のモーメント図を固定モーメント法で求めよ。



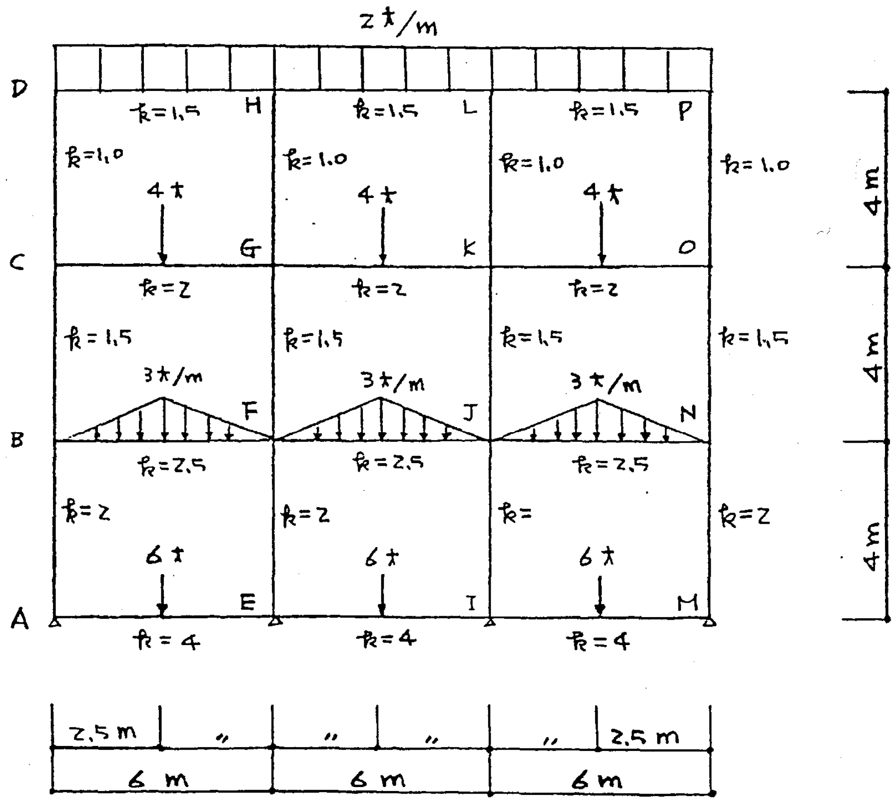
図－4・16

(問題 4・3)　図のラーメンのモーメント図を固定モーメント法で求めよ。



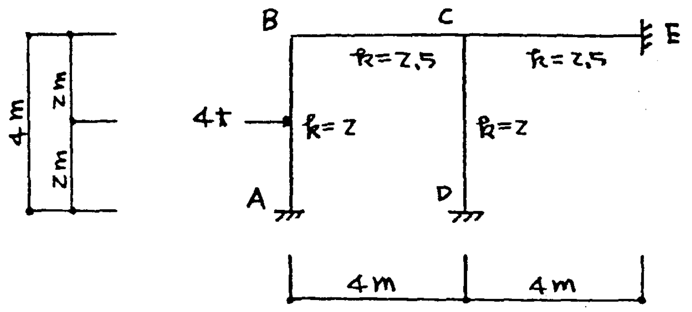
図－4・17

(問題 4・4)　図のラーメンのモーメント図を固定モーメント法で求めよ。



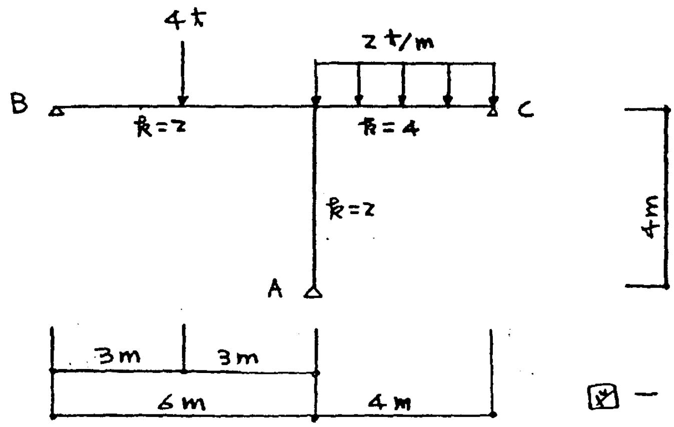
図－4・18

（問題 4.5）　図のラーメンのモーメント図を固定モーメント法で求めよ。



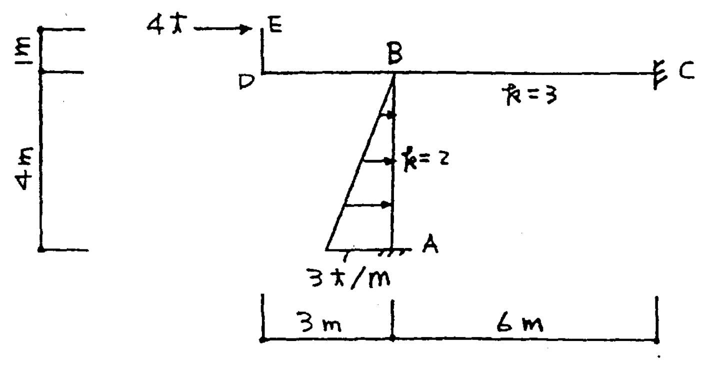
図－4.19

（問題 4.6）　図のラーメンのモーメント図を固定モーメント法で求めよ。



図－4.20

（問題 4.7）　図のラーメンのモーメント図を固定モーメント法で求めよ。



第 5 章　仮想仕事法　(Principle of virtual work)

5・1　概説

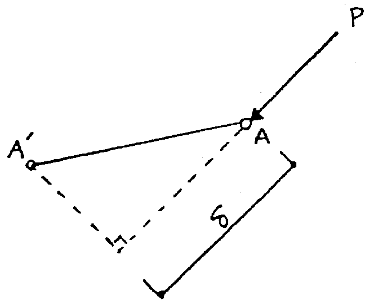
構造物の変形や応力解析として代表的な解析法の一つである。仕事式だけでは荷重点の変位しか求める事は出来ない。そこでマックスウェルの定理やカステリアノの定理等を用いて仮想仕事法が導びかれた。仮想仕事法は変形を求めたい点に仮想の荷重 $\bar{P}=1$ を加えれば応力，変位が求まるという便利な方法になっている。

仮想仕事法の誘導等は多くの名著がある。

こゝでは実用上の公式の運用について練習を行うものとする。

5・2　仕事とは

今A点に力 (P) が作用している時他の外力に依ってA′に移動した時の変形の仕事は次式による。



図－5・1

$$W = P \cdot \delta \qquad \text{------}(5 \cdot 1)$$

A点に荷重が除々に作用し遂にPに到った時，A点がA′点に移動した時の変形の仕事は次式による

$$W = \frac{1}{2} P \cdot \delta \qquad \text{------}(5 \cdot 2)$$

西村敏雄著「応用力学演習問題解析法」：理工図書

斉藤謙次著「建築構造力学」：理工図書

等を参照した。

5・3　仮想仕事式

仮想仕事法の公式は前頁の著書を参考にする。

外力のなす仕事は内力のなす仕事に等しいから

$$W_o = [M, Q, N] \qquad \text{------- (5・3)}$$

今仮想の荷重を $\overline{P} = 1$ とすると外部仕事は次式になる。

$$W_o = \overline{P} \cdot \delta = \delta \qquad \text{------- (5・4)}$$

仮想仕事式は次式で表わされる。

$$\delta = \int \frac{M\overline{M}}{EI} dx + \int K \frac{Q\overline{Q}}{GA} dx + \int \frac{N\overline{N}}{EA} dx \qquad \text{------- (5・5)}$$

E ： ヤング係数
I ： 断面2次モーメント
G ： せん断弾性係数
A ： 材の断面積
K ： 断面のせん断形状係数
　　矩形の時　$K = 1.2$
　　円形の時　$K = 1.11$
　Kの求め方は　S・ティモシェンコ,D・Hヤング著「改訂材料力学要論」：コロナ社　を参照されたい。

M ：
N ：
Q ：
実際の外力による曲げモーメント，軸力及びせん断力

$\overline{M}$ ：
$\overline{N}$ ：
$\overline{Q}$ ：
仮想荷重 $\overline{P} = 1$ を加えた時の曲げモーメント，軸力及びせん断力

梁又はラーメンの計算の時は N，Q の影響は微小であるから

一般には次式を用いてよい。

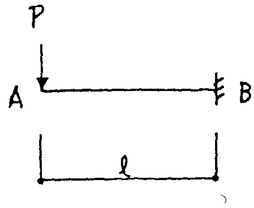
$$\left.\begin{aligned} \delta &= \int \frac{M\overline{M}}{EI} dx \\ \theta &= \int \frac{M\overline{M}}{EI} dx \end{aligned}\right] \qquad \text{------- (5・6)}$$

トラスの計算の場合は軸力しか作用しないから

$$\delta = \int \frac{N\overline{N}}{EA}dx = \Sigma \frac{N\overline{N}}{EA} \cdot \ell \quad \text{-------} (5\cdot7)$$

以下練習問題を中心に公式の運用を理解されたい。

（問題 5・1）　図の片持梁の先端のたわみを求めよ。

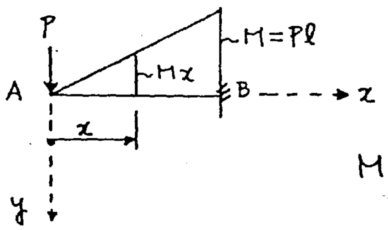


図－5・2 (a)

梁の曲げ剛さ EI を一定とする。

（解）

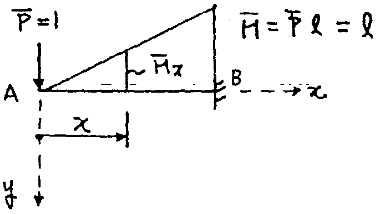
P が実際に加わっている時の曲げモーメントの一般式（M_x）を求める。



$$M_x = -P \cdot x \quad \text{------} (1)$$

図－5・2 (b)

A 点のたわみを求めたいから A 点に $\overline{P} = 1$ という仮想荷重を加え，その時の曲げモーメントの一般式（$\overline{M}_x$）を求める。



$$\overline{M}_x = -\overline{P} \cdot x = -x \quad \text{------} (2)$$

図－5・2 (c)

(5・6) 式を用いて求める。

$$\delta = \int_0^\ell \frac{M\overline{M}}{EI}dx = \frac{1}{EI}\int_0^\ell M\overline{M}\,dx$$

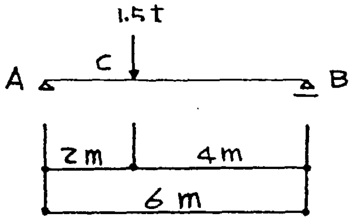
$$= \frac{1}{EI}\int_0^\ell (-P\cdot x)(-x)\,dx = \frac{P}{EI}\int x^2 dx$$

$$= \frac{P}{3EI}[x^3]_0^\ell = \frac{P}{3EI}(\ell^3 - 0^3)$$

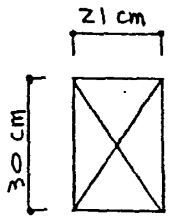
$$= \frac{P\ell^3}{3EI} \quad \text{-------} (3)$$

（例題 5・2）　図の単純梁のC点のたわみを求めよ。

但し梁は木材で下図断面とする。



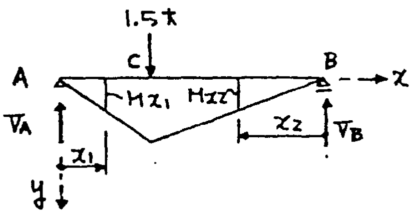
図－5・3 (a)



$E_w = 90000\ \mathrm{Kg/cm^2}$

図－5・3 (b)

（解）



図－5・3 (C)

実荷重が加わっている時の M_x を求める。

$$V_A = \frac{1.5\times 4}{6} = 1.0\ \mathrm{ton}$$

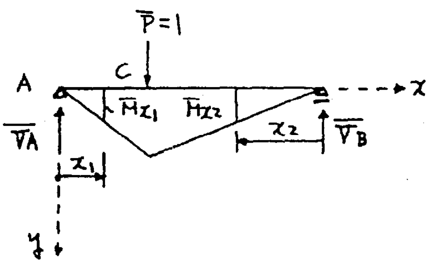
$$V_B = 0.5\ \mathrm{ton}$$

A－C間の曲げモーメント $(x=0\sim 2\,\mathrm{m})$

$$M_{x1} = V_A\cdot x_1 = x_1 \qquad \text{------- (1)}$$

B－C間の曲げモーメント $(x=0\sim 4\,\mathrm{m})$

$$M_{x2} = V_B\cdot x = 0.5x_2 \qquad \text{------- (2)}$$



図－5・3 (d)

C点に $\overline{P}=1$ を加えた時の $\overline{M}_x$ を求める。

$$\overline{V}_A = \frac{\overline{P}\times 4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\overline{V}_B = \frac{1}{3}$$

A－C間の曲げモーメント $(x=0\sim 2\,\mathrm{m})$

$$\overline{M}_{x1} = \overline{V}_A\cdot x_1 = \frac{2}{3}x_1 \qquad \text{------ (3)}$$

B－C間の曲げモーメント $(x=0\sim 4\,\mathrm{m})$

$$\overline{M}_{x2} = \overline{V}_B\cdot x_2 = \frac{1}{3}x_2 \qquad \text{------ (4)}$$

$$\delta_c = \int_0^2 \frac{M_{x1}\overline{M}_{x1}}{EI}dx_1 + \int_0^4 \frac{M_{x2}\overline{M}_{x2}}{EI}dx_2$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^2 \left(x_1 \cdot \frac{2}{3}x_1\right)dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^4 \left(0.5x_2 \cdot \frac{1}{3}x_2\right)dx_2$$

$$= \frac{2}{3EI}\int_0^2 x_1^2\,dx_1 + \frac{1}{6EI}\int_0^4 x_2^2\,dx_2$$

$$= \frac{2}{9EI}\left[x^3\right]_0^2 + \frac{1}{18EI}\left[x^3\right]_0^4 = \frac{16}{9EI} + \frac{32}{9EI}$$

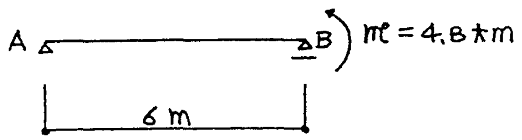
$$= \frac{48}{9EI} \qquad \text{--------(5)}$$

$I = 4.725 \times 10^{-4}\ m^4$

$E_w = 90 \times 10^4\ t/m^2$

$$\delta_c = \frac{48}{9EI} = \frac{48}{9 \times 90 \times 4.725} = 0.01254\,m = 1.254\,cm$$

（例題 5・3）　図の単純梁のA点のたわみ角を求めよ。



図－5・4（a）

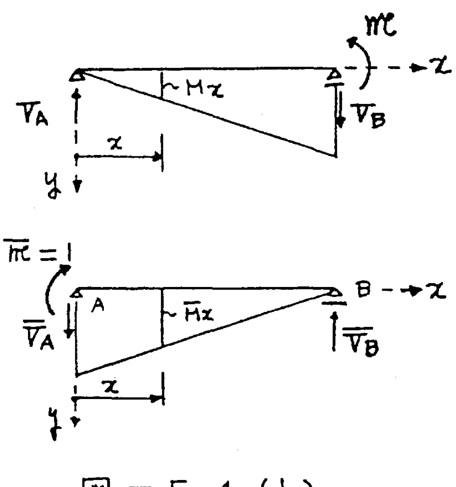
梁はH形鋼とする。

$H - 250 \times 125 \times 6 \times 9$

$I = 4050\ cm^4$

$E_s = 2.1 \times 10^6\ kg/cm^2$

（解）



図－5・4（b）

$\mathcal{M} = 4.8\ tm$が作用した時

反力の計算

$$V_A = \frac{\mathcal{M}}{l} = 0.8\ ton = -V_B \quad \text{----(1)}$$

曲げモーメントの一般式

$$M_x = V_A \cdot x = 0.8x \quad \text{-------(2)}$$

$\overline{\mathcal{M}} = 1$が作用した時

反力の計算

$$\overline{V}_A = -\frac{\overline{\mathcal{M}}}{l} = -\frac{1}{6} = \overline{V}_B \quad \text{-----(3)}$$

曲げモーメントの一般式

$$\overline{M}_x = \overline{\mathcal{M}} - \overline{V}_A \cdot x = 1 - \frac{1}{6}x \quad \text{----(4)}$$

$$\theta = \int_0^6 \frac{M_x \overline{M}_x}{EI}\, dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^6 0.8x \cdot \left(1 - \frac{1}{6}x\right) dx = \frac{1}{EI}\int_0^6 \left(-\frac{0.8}{6}x^2 + 0.8x\right) dx$$

$$= -\frac{0.8}{6EI}\int_0^6 x^2 dx + \frac{0.8}{EI}\int_0^6 x\, dx$$

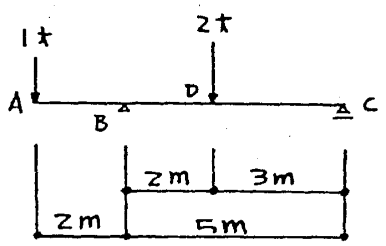
$$= -\frac{0.8}{18EI}\left[x^3\right]_0^6 + \frac{0.4}{EI}\left[x^2\right]_0^6$$

$$= -\frac{172.8}{18EI} + \frac{259.2}{18EI} = \frac{4.8}{EI} = \frac{4.8}{21\times10^6 \times 40.5\times10^{-6}}$$

$$= 5.6437\times10^{-3}\ \mathrm{Rad}$$

（例題 5・4）

図のはね出し式単純梁のA点のたわみを求めよ。



図－5・5 (a)

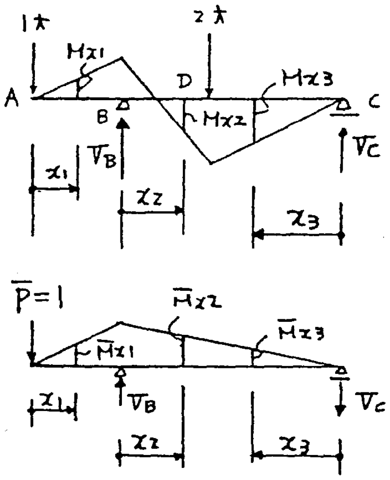
梁はH形鋼とする。

H － 200 × 100 × 5.5 × 8

$I = 1840\ \mathrm{cm^4}$

$E_s = 2.1\times10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$

（解）



図－5・5 (b)

反力の計算

$\Sigma M_B = 0$ より

$-1\times2 + 2\times2 - 5V_C = 0 \qquad V_C = 0.4\,\mathrm{t}$

$\Sigma Y = 0$ より $\qquad V_B = 2.6\,\mathrm{ton}$

$\overline{P} = 1$ の時の反力

$\Sigma M_B = 0$ より　$\overline{V}_C$を下向きと仮定する

$-1\times2 + 5\overline{V}_C = 0 \qquad \overline{V}_C = 0.4$ （下向き）

$\Sigma Y = 0$ より $\qquad \overline{V}_B = 1.4$ （上向き）

A − B 間の曲げモーメント

$M_{x1} = -x_1$ ------ (1)

$\overline{M}_{x1} = -x_1$ ------ (2)

B − D 間の曲げモーメント

$M_{x2} = -1 \cdot (x_2 + 2) + 2.6\,x_2 = 1.6\,x_2 - 2$ ------ (3)

$\overline{M}_{x2} = -1 \cdot (x_2 + 2) + 1.4\,x_2 = 0.4\,x_2 - 2$ ------ (4)

C − D 間の曲げモーメント

$M_{x3} = 0.4\,x_3$ ------ (5)

$\overline{M}_{x3} = -0.4\,x_3$ ------ (6)

$$\delta = \frac{1}{EI}\left(\int_A^B M_{x1}\cdot\overline{M}_{x1}\,dx_1 + \int_B^D M_{x2}\cdot\overline{M}_{x2}\,dx_2 + \int_D^C M_{x3}\cdot\overline{M}_{x3}\,dx_3\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^2 (-x_1)(-x_1)\,dx_1 + \int_0^2 (1.6\,x_2 - 2)(0.4\,x_2 - 2)\,dx_2 + \int_0^3 0.4\,x_3\,(-0.4\,x_3)\,dx_3\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^2 x_1^2\,dx_1 + \int_0^2 (0.64\,x_2^2 - 4\,x_2 + 4)\,dx_2 + \int_0^3 -0.16\,x_3^2\,dx_3\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}[x_1^3]_0^2 + \frac{0.64}{3}[x_2^3]_0^2 - 2[x_2^2]_0^2 + 4\cdot[x]_0^2 - \frac{0.16}{3}[x_3^3]_0^3\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{8}{3} + \frac{5.12}{3} - 8 + 8 - \frac{4.32}{3}\right)$$

$$= \frac{8.8}{3EI}$$

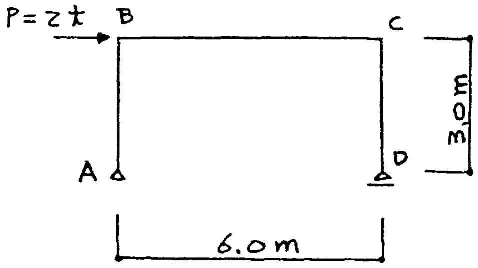
$$= \frac{8.8}{3 \times 21 \times 10^6 \times 18.4}$$

$$= 7.59 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

$$= 0.759\ \text{cm}$$

（例題 5・5）

図の静定ラーメンのB点の水平方向の変位を求めよ。



図－5・6 (a)

柱，梁共鉄骨断面で

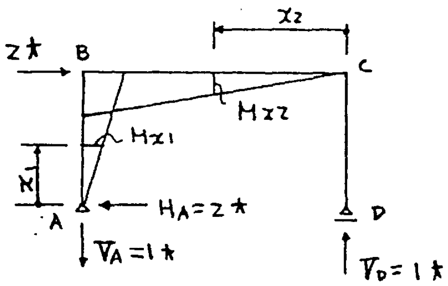
柱　H－200×200×8×12

　　$I_c = 4720\ \mathrm{cm}^4$

梁　H－250×125×6×9

　　$I_G = 4050\ \mathrm{cm}^4$

（解）



図－5・6 (b)

荷重が作用している時の反力を求め，曲げモーメントの一般式を求める。

$\Sigma X = 0$ より H_A を左向きとすると

$$2 - H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 2\,\mathrm{t}$$

$\Sigma M_A = 0$ より V_D を上向きとすると

$$2 \times 3 - 6V_D = 0 \qquad \therefore V_D = 1\,\mathrm{t}$$

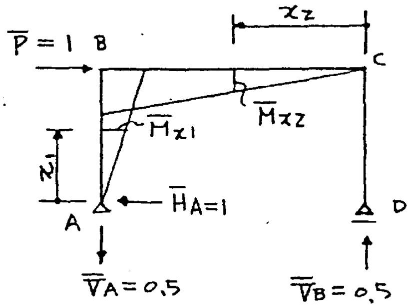
$\Sigma Y = 0$ より　$V_A = 1\,\mathrm{t}$（下向き）

C－D柱にモーメントは生じないから

$$M_{x1} = 2x_1 \qquad \text{------ (1)}$$

$$M_{x2} = x_2 \qquad \text{------ (2)}$$

B点が右方へ変位すると想定し，B点に $\overline{P} = 1$ を右方へ作用させて反力と曲げモーメントの一般式を求める。



図－5・6 (c)

反力は実荷重が作用している時と同様に求めて

$\overline{H}_A = 1$

$\overline{V}_A = 0.5$（下向き）　$\overline{V}_D = 0.5$（上向き）

C－D部材にモーメントは生じないから

$$\overline{M}_{x1} = x_1 \qquad \text{------ (3)}$$

$$\overline{M}_{x2} = 0.5\,x_2 \qquad \text{------ (4)}$$

$$\delta = \frac{1}{EI_c}\int_A^B M_{x1}\cdot\overline{M}_{x1}\,dx_1 + \frac{1}{EI_G}\int_C^B M_{x2}\cdot\overline{M}_{x2}\,dx_2$$

$$= \frac{1}{EI_c}\int_0^3 2x_1\cdot x_1\,dx_1 + \frac{1}{EI_G}\int_0^6 x_2\cdot 0.5x_2\,dx$$

$$= \frac{2}{3EI_c}\left[x_1^3\right]_0^3 + \frac{0.5}{3EI_G}\left[x_2^3\right]_0^6$$

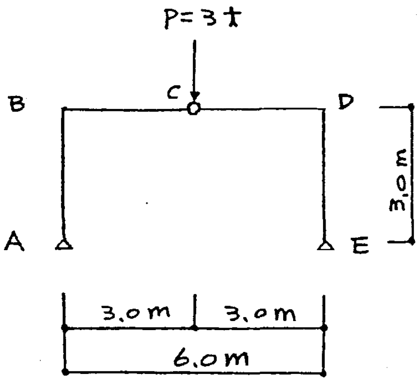
$$= \frac{18}{EI_c} + \frac{36}{EI_G}$$

$$= \frac{18}{21\times 47.2} + \frac{36}{21\times 40.5}$$

$$= 0.0182 + 0.042$$

$$= 0.0605\ \mathrm{m} = 6.05\ \mathrm{cm}$$

（例題 5・6）　図の静定ラーメンのC点の変位を求めよ。



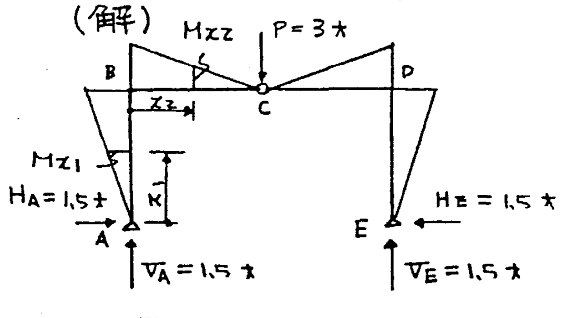
図－5・7 (a)

柱，梁共鉄骨断面で

柱　H－200×200×8×12
　　$I_c = 4720\ \mathrm{cm^4}$

梁　H－250×125×6×9
　　$I_G = 4050\ \mathrm{cm^4}$

（解）



図－5・7 (b)

反力の方向を左図の様に仮定する。

$\Sigma M_A = 0$　より

$3\times 3 - 6V_E = 0 \qquad \therefore V_E = 1.5\,t$

$\Sigma Y = 0$　より　$V_A = 1.5\,t$

$\Sigma M_c = 0$ より　（C点より左について求める）

$1.5 \times 3 - 3H_A = 0$　　$\therefore H_A = 1.5t$（右向き）

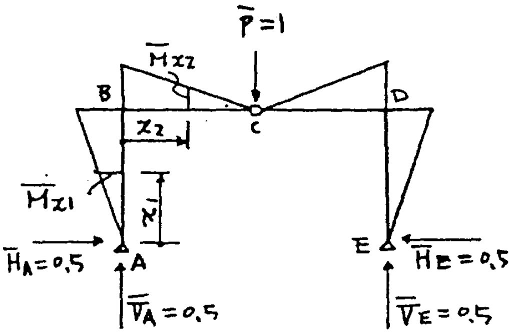
$\Sigma X = 0$　より　　$H_E = 1.5t$

曲げモーメントの一般式は

$M_{x1} = -1.5x_1$ ------ (1)

$M_{x2} = -4.5 + 1.5x_2$ ------ (2)

C点に $\bar{P} = 1$ を作用させた時の反力と曲げモーメントを求める。



図−5.7（C）

$\Sigma M_A = 0$　より　$1 \times 3 - 6 \times \bar{V}_E = 0$
$\therefore \bar{V}_E = 0.5$

$\Sigma Y = 0$　より　$\bar{V}_A = 0.5$

$\Sigma M_c = 0$　（C点より左について求める）

$0.5 \times 3 - 3\bar{H}_A = 0$　　$\therefore \bar{H}_A = 0.5$（右）

$\Sigma X = 0$ より　　$\bar{H}_E = 0.5$（左）

$\bar{M}_{x1} = -0.5x_1$ ------ (3)

$\bar{M}_{x2} = -1.5 + 0.5x_2$ ------ (4)

対称ラーメンであるから左半分のモーメントを2倍して半分だけ計算する。

$$\delta = \frac{2}{EI_c}\int_A^B M_{x1}\cdot\bar{M}_{x1}\,dx_1 + \frac{2}{EI_G}\int_B^C M_{x2}\cdot\bar{M}_{x2}\,dx_2$$

$$= \frac{2}{EI_c}\int_0^3(-1.5x_1)(-0.5x_1)\,dx_1 + \frac{2}{EI_G}\int_0^3(1.5x_2 - 4.5)(0.5x_2 - 1.5)\,dx_2$$

$$= \frac{2}{EI_c}\int_0^3 0.75x_1^2\,dx_1 + \frac{2}{EI_G}\int_0^3(0.75x_2^2 - 4.5x_2 + 6.75)\,dx_2$$

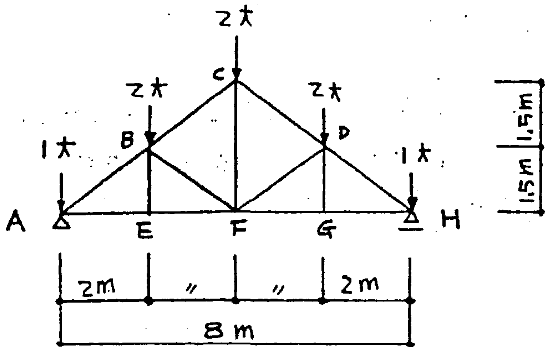
$$= \frac{1.5}{3EI_c}\left[x_1^3\right]_0^3 + \frac{1.5}{3EI_G}\left[x_2^3\right]_0^3 - \frac{9}{2EI_G}\left[x_2^2\right]_0^3 + \frac{13.5}{EI_G}\left[x_2\right]_0^3$$

$$= \frac{13.5}{EI_c} + \frac{1}{EI_G}(13.5 - 40.5 + 40.5) = \frac{13.5}{21 \times 47.2} + \frac{13.5}{21 \times 40.5}$$

$$= 0.0136 + 0.0159 = 0.0295\ \text{m} = 2.95\ \text{cm}$$

（例題 5-7）　図の静定トラスのF点の変位を求めよ。

部材断面は鉄骨とする。



上弦材・下弦材

2L－65×65×6

$A = 15.054\ cm^2$

斜材・垂直材

L－65×65×6

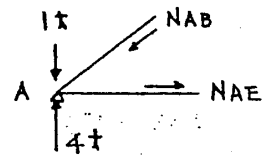
$A = 7.527\ cm^2$

図－5・8（a）

（解）　荷重が作用している時の軸力（N）を求める。

反力は対称荷重であるから　$V_A = V_H = 4t$（上向き）

N_{AB}，N_{AE} の計算　　A点の釣り合いから

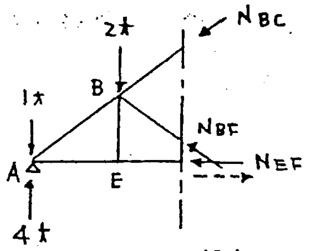


$$N_{AB} = 3 \times \frac{5}{3} = 5t\ （圧）$$

$$N_{AE} = 3 \times \frac{4}{3} = 4t\ （引）$$

$N_{BE} = 0$

N_{EF} の計算（リッターの切断法で求める）

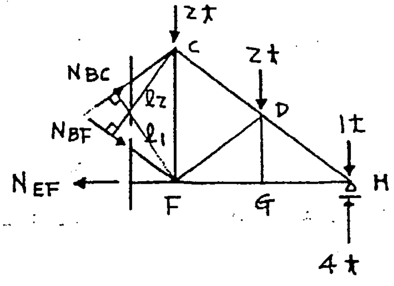


$\Sigma M_B = 0$

$3 \times 2 + 1.5 N_{EF} = 0$

$\therefore N_{EF} = -4t$（引）　仮定と方向反対

N_{BC} の計算



$\Sigma M_F = 0$　　$l_1 = 3 \times \frac{4}{5} = 2.4\ m$

$2.4 N_{BC} + 2 \times 2 - 3 \times 4 = 0$

$2.4 N_{BC} = 8$

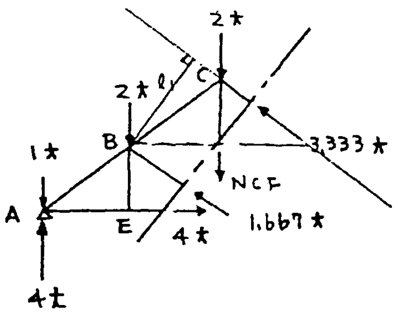
$N_{BC} = 3.333t$（圧）

N_{BF} の計算　　$l_2 = 3 \times \frac{4}{5} = 2.4\ m$

$\Sigma M_C = 0$　　$4 \times 3 - 2.4 N_{BF} + 2 \times 2 - 3 \times 4 = 0$

$N_{BF} = 1.667t$（圧）

N_{CF} の計算



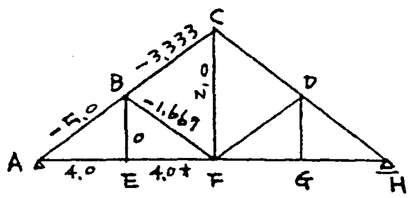
$l_1 = 4 \times \frac{3}{5} = 2.4\,m$

$\Sigma M_B = 0$ より

$$3 \times 2 - 4 \times 1.5 - 2.4 \times 3.333 + 2 \times 2 + 2N_{CF} = 0$$

$$6 - 6 - 7.999 + 4 + 2N_{CF} = 0$$

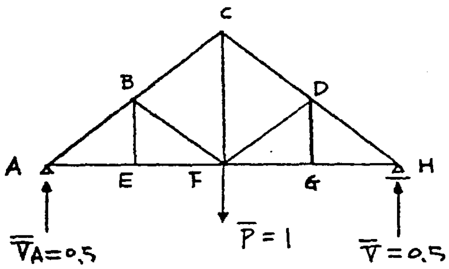
$$N_{CF} = 2t \quad (引)$$



図－5・8(b)

実荷重時の軸力
圧縮 (−)
引張 (+)

F点は下向きに変位するとし，F点に $\overline{P}=1$ を下向きに作用させ，その時の軸力を求める。



図－5・8(c)

A点の釣り合いから

$$N_{AB} = 0.5 \times \frac{5}{3} = 0.833 \quad (圧)$$

$$N_{AE} = 0.5 \times \frac{4}{3} = 0.667 \quad (引)$$

N_{EF} の計算

$0.5 \times 2 - 1.5N_{EF} = 0$ $\qquad N_{EF} = 0.667$ (引)

N_{BC} の計算 $\quad \Sigma M_F = 0$

$2.4\,N_{BC} - 4 \times 0.5 = 0$ $\qquad N_{BC} = 0.833$ (圧)

N_{BF} の計算 $\quad \Sigma M_C = 0$

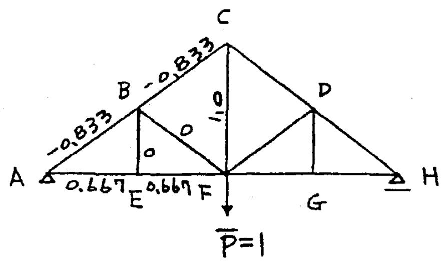
$0.667 \times 3 - 2.4\,N_{BF} - 4 \times 0.5 = 0$ $\qquad N_{BF} = 0$

N_{CF} の計算 $\quad \Sigma M_B = 0$

$0.5 \times 2 - 0.667 \times 1.5 - 0.833 \times 2.4 + 2 \cdot N_{CF} = 0$

$1.0 - 1.0 - 2 + 2N_{CF} = 0$ $\qquad N_{CF} = 1.0$ (引)

$N_{BE} = 0$



図－5.8 (d)

$\bar{P}=1$ の時の軸力

圧縮 (－)
引張 (＋)

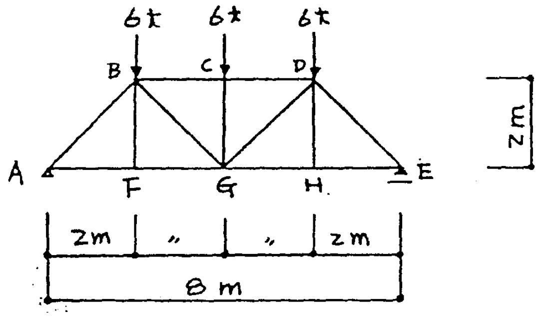
部材名	N (kg)	$\bar{N}$	$N \cdot \bar{N}$ (kg)	材長 (ℓ) (cm)	E・A (kg)	$\frac{N \cdot \bar{N}}{E \cdot A} \cdot \ell$
A－B	－5000	－0.833	4165	250	31613400	0.033
B－C	－3333	－0.833	2776	250	仝　上	0.022
C－D	－3333	－0.833	2776	250	仝　上	0.022
D－H	－5000	－0.833	4165	250	仝　上	0.033
A－E	4000	0.667	2668	200	仝　上	0.017
E－F	4000	0.667	2668	200	仝　上	0.017
F－G	4000	0.667	2668	200	仝　上	0.017
G－H	4000	0.667	2668	200	仝　上	0.017
B－E	0	0	—	150	15806700	—
B－F	－1667	0	—	250	仝　上	—
C－F	2000	1.0	2000	300	仝　上	0.038
D－F	－1667	0	—	250	仝　上	—
D－G	0	0	—	150	仝　上	—
					$\Sigma \frac{N\bar{N}}{EA} \ell$	0.216

従って 0.216 cm 下方へたわむ。

もし符号が負となれば仮定した方向と反対に変位する。

（例題 5・8）　図のトラスのG点の変位を求めよ。

部材断面は鉄骨とする。



図－5・9 (a)

上弦材・下弦材

2L－65×65×6

$A = 15.054\ cm^2$

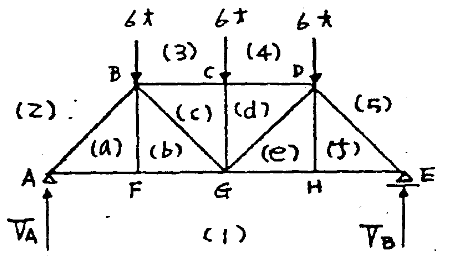
斜材・垂直材

L－65×65×6

$A = 7.527\ cm^2$

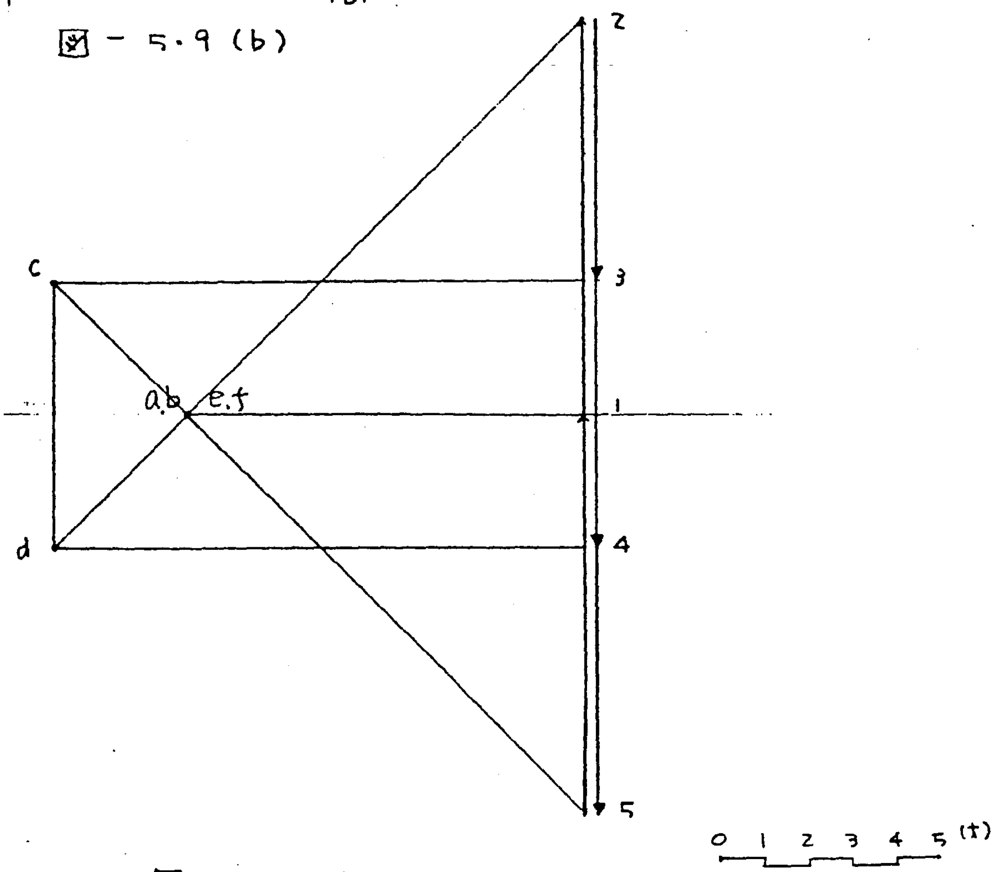
（解）　荷重が作用している軸力（N）をクレモナの図解法で求める。

反力は　$V_A = V_E = 9t$



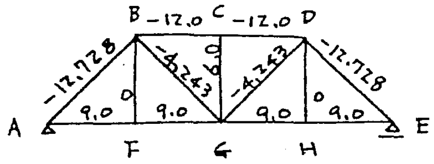
図－5・9 (b)

構面符号を左図の如く求める。



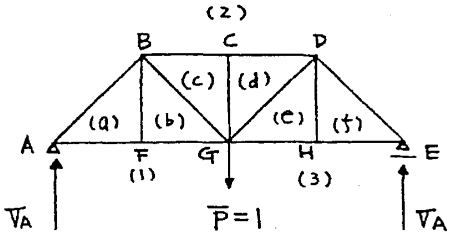
図－5・9 (c)

軸力（N）

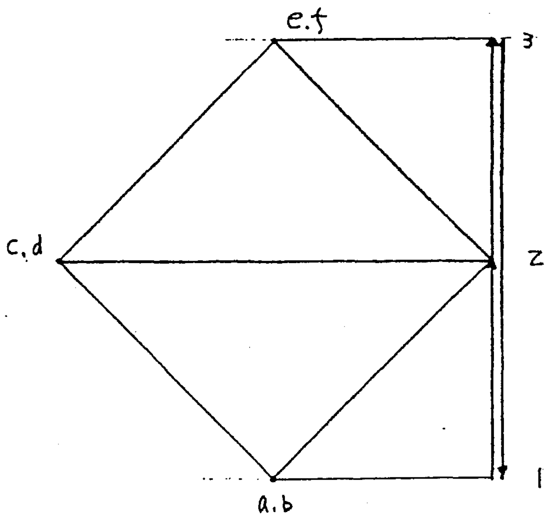


図－5・9（d）

変位を求めるG点に $\bar{P}=1$ を作用させた時の軸力 $\bar{N}$ を求める。

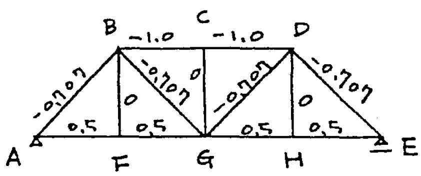


図－5・9（e）



図－5・9（f）

軸力（$\bar{N}$）



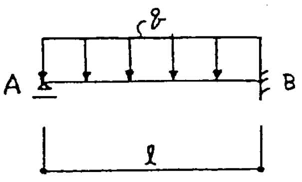
図－5・9（f）

部材名	N (kg)	$\bar{N}$	$N \cdot \bar{N}$	材長 (l) (cm)	$E \cdot A$ (kg)	$\frac{N\bar{N}}{EA}l$
A — B	−12728	−0.707	8998.7	282.8	3161340	0.08
B — C	−12000	−1.0	12000	200	仝 上	0.076
C — D	−12000	−1.0	12000	200	仝 上	0.076
D — E	−12728	−0.707	8998.7	282.8	仝 上	0.08
A — F	9000	0.5	4500	200	仝 上	0.028
F — G	9000	0.5	4500	200	仝 上	0.028
G — H	9000	0.5	4500	200	仝 上	0.028
H — E	9000	0.5	4500	200	仝 上	0.028
B — F	0	0	—	200	1580670	—
B — G	−4243	−0.707	2999.8	282.8	仝 上	0.054
C — G	6000	0	—	200	仝 上	—
G — D	−4243	−0.707	2999.8	282.8	仝 上	0.027
D — H	0	0	—	200	仝 上	—
					$\Sigma \frac{N\bar{N}}{EA}l$	0.505

従って G 点は下方へ 0.505 cm 変位する。

(例題 5・9)　左図の如き不静定梁の曲げモーメント図を求めよ。

但し梁の曲げ剛さを E・I とする。



図－5・10 (a)

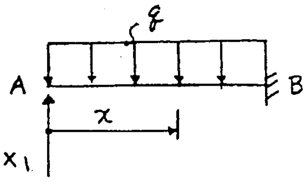
(解)　構造物の判別を行う

$r = 0 \quad s = 1 \quad t = 4 \quad k = 2$

$r + s + t - 2k = 1$　(1次の不静定梁)

この様な場合反力(支持状態)を1つ変えて静定基本構として考える。従ってA点を自由端(反力が一つ減る)にして片持梁とする方法と，B点をピン(反力が一つ減る)として単純梁として求める方法の2通り解法がある。

こゝでは静定基本構を片持梁として求める。

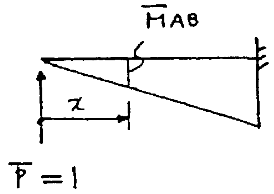


図－5・10 (b)

実際はA点はローラーであるから，そこに生ずる反力(不静定余力) X_1 を加えてモーメントを計算する。

A－B間の曲げモーメントは

$$M_{AB} = -\frac{q}{2}x^2 + X_1 \cdot x \qquad \text{------ (1)}$$



図－5・10 (c)

A点は実は支点であるから，A点に $\overline{P} = 1$ を作用させ δ_A を求め　$\delta_A = 0$　から不静定余力 X_1 を求める。

A－B間の曲げモーメントは

$$\overline{M}_{AB} = x \qquad \text{----- (2)}$$

A点のたわみは

$$\delta_A = \frac{1}{EI}\int_A^B M_{AB}\cdot\overline{M}_{AB}\,dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^l \left(-\frac{q}{2}x^2 + X_1\cdot x\right)\cdot x\,dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^l \left(-\frac{q}{2}x^3 + X_1\cdot x^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\left[-\frac{q}{8}x^4\right]_0^l + \left[\frac{1}{3}X_1\cdot x^3\right]_0^l\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left(-\frac{q}{8}l^4 + \frac{1}{3}X_1\cdot l^3\right)$$

$$= \frac{l^3}{EI}\left(-\frac{q}{8}l + \frac{1}{3}X_1\right) \qquad \text{------- (3)}$$

先に述べた様にA点は支点であるから　$\delta_A = 0$　である。

従って(3)式より

$$-\frac{q}{8}l + \frac{1}{3}X_1 = 0$$

$$\therefore\quad X_1 = \frac{3}{8}ql \qquad \text{------- (4)}$$

B点の曲げモーメントは (1) 式に X_1 及び $x = l$ を代入して

$$M_{AB} = -\frac{q}{2}l^2 + \frac{3}{8}ql^2$$

$$= -\frac{1}{8}ql^2 \qquad \text{------ (5)}$$

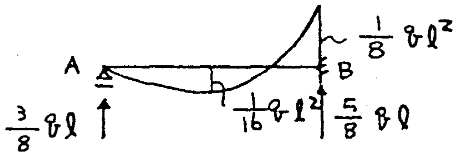
中央 ($x = l/2$) の曲げモーメントは

$$M_{中央} = -\frac{q}{2}\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}ql\cdot\frac{l}{2}$$

$$= -\frac{ql^2}{8} + \frac{3}{16}ql^2$$

$$= \frac{1}{16}ql^2 \qquad \text{----- (6)}$$

$\Sigma Y = 0$　より　　$V_B = ql - \frac{3}{8}ql = \frac{5}{8}ql$　　------ (7)

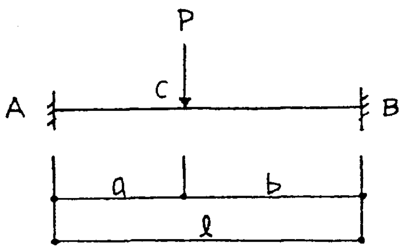


図－5.10(d)

(例題 5・10)

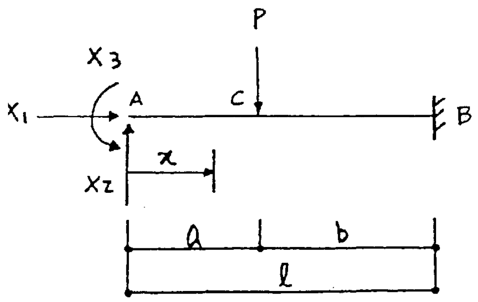
左図の如き両端固定梁に集中荷重Pが作用した時の曲げモーメント図を求めよ。

但し梁の曲げ剛さをE・Iとする。



図－5・11 (a)

(解)　3次の不静定梁である。従って不静定余力が3個必要である。　静定基本構を片持梁として求める。



図－5・11 (b)

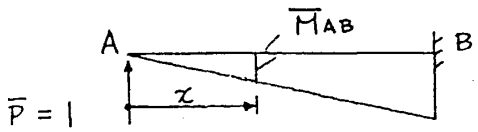
水平荷重はないので　$X_1 = 0$　である。

A－C間の曲げモーメント

$$M_{AC} = X_2 \cdot x - X_3 \qquad \text{------ (1)}$$

C－B間の曲げモーメント

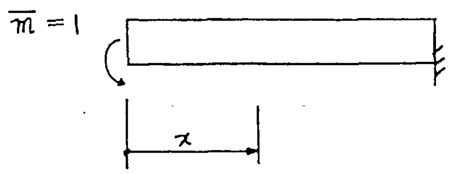
$$M_{CB} = X_2 \cdot x - X_3 - P \cdot (x - a)$$
$$= (X_2 - P)x + (Pa - X_3) \qquad \text{---- (2)}$$



図－5・11 (c)

境界条件を考えるとA点のたわみ $\delta_A = 0$　であるから，A点に $\overline{P} = 1$ を作用させる。

$$\overline{M}_{AC1} = \overline{M}_{CB1} = x \qquad \text{------ (3)}$$



図－5・11 (d)

A点の回転角　$\theta_A = 0$　であるから，A点に $\overline{m} = 1$ を作用させる。

$$\overline{M}_{AC2} = \overline{M}_{CB2} = -1 \qquad \text{------ (4)}$$

$$\delta_A = \int_0^a \frac{M_{AC}\cdot\overline{M}_{AC1}}{EI}dx + \int_a^l \frac{M_{CB}\cdot\overline{M}_{CB1}}{EI}dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^a (X_2\cdot x - X_3)\cdot x\,dx + \frac{1}{EI}\int_a^l \{(X_2-P)x + (Pa - X_3)\}x\,dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^a (X_2\cdot x^2 - X_3\cdot x)dx + \frac{1}{EI}\int_a^l \{(X_2-P)x^2 + (Pa-X_3)x\}dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{X_2}{3}\cdot x^3 - \frac{X_3}{2}x^2\right]_0^a + \frac{1}{EI}\left[\frac{(X_2-P)}{3}x^3 + \frac{(Pa-X_3)}{2}x^2\right]_a^l$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\frac{a^3}{3}X_2 - \frac{a^2}{2}X_3 + \frac{(X_2-P)}{3}l^3 + \frac{(Pa-X_3)}{2}l^2 - \frac{(X_2-P)}{3}a^3 - \frac{(Pa-X_3)}{2}a^2\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{a^3}{3}X_2 - \frac{a^2}{2}X_3 + \frac{l^3}{3}X_2 - \frac{Pl^3}{3} + \frac{Pal^2}{2} - \frac{l^2}{2}X_3 - \frac{a^3}{3}X_2 + \frac{Pa^3}{3} - \frac{Pa^3}{2} + \frac{a^2}{2}X_3\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{l^3}{3}X_2 - \frac{l^2}{2}X_3 - \frac{Pl^3}{3} + \frac{Pal^2}{2} - \frac{Pa^3}{6}\right) \quad \text{------ (5)}$$

$\delta_A = 0$ であるから

$$\frac{l^3}{3}X_2 - \frac{l^2}{2}X_3 = \frac{Pl^3}{3} - \frac{Pal^2}{2} + \frac{Pa^3}{6} \quad \text{------ (6)}$$

$$\theta_A = \int_0^a \frac{M_{AC}\overline{M}_{AC2}}{EI}dx + \int_a^l \frac{M_{CB}\overline{M}_{CB2}}{EI}dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^a (X_2\cdot x - X_3)(-1)dx + \frac{1}{EI}\int_a^l \{(X_2-P)x + (Pa-X_3)\}(-1)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^a (-X_2x + X_3)dx + \frac{1}{EI}\int_a^l \{-(X_2-P)x - (Pa-X_3)\}dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left[-\frac{X_2}{2}x^2 + X_3x\right]_0^a + \frac{1}{EI}\left[-\frac{(X_2-P)}{2}x^2 - (Pa-X_3)x\right]_a^l$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{-\frac{a^2}{2}X_2 + aX_3 - \frac{(X_2-P)}{2}l^2 - (Pa-X_3)l + \frac{(X_2-P)}{2}a^2 + (Pa-X_3)a\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left(-\frac{a^2}{2}X_2 + aX_3 - \frac{l^2}{2}X_2 + \frac{Pl^2}{2} - Pal + lX_3 + \frac{a^2}{2}X_2 - \frac{Pa^2}{2} + Pa^2 - aX_3\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(-\frac{l^2}{2}X_2 + lX_3 + \frac{Pl^2}{2} - Pal + \frac{Pa^2}{2}\right) \quad \text{------ (7)}$$

$\theta_A = 0$ であるから

$$-\frac{l^2}{2}X_2 + lX_3 + \frac{Pl^2}{2} - Pal + \frac{Pa^2}{2} = 0$$

$$-\frac{l^2}{2}X_2 + lX_3 = -\frac{Pl^2}{2} + Pal - \frac{Pa^2}{2} \quad \text{------ (8)}$$

(7)，(8) 式を連立で解く

(8)式より $\quad X_3 = \frac{l}{2}X_2 - \frac{Pl}{2} + Pa - \frac{Pa^2}{2l} \quad$ ------ (9)

(9)式を (6)式に代入する．

$$\frac{l^3}{3}X_2-\frac{l^2}{2}\left(\frac{l}{2}X_2-\frac{Pl}{2}+Pa-\frac{Pa^2}{2l}\right)=\frac{Pl^3}{3}-\frac{Pal^2}{2}+\frac{Pa^3}{6}$$

$$\frac{l^3}{3}X_2-\frac{l^3}{4}X_2+\frac{Pl^3}{4}-\frac{Pal^2}{2}+\frac{Pa^2l}{4}=\frac{Pl^3}{3}-\frac{Pal^2}{2}+\frac{Pa^3}{6}$$

$$\frac{l^3}{12}X_2=\frac{Pl^3}{12}-\frac{Pa^2l}{4}+\frac{Pa^3}{6}$$

$$X_2=P-\frac{3Pa^2}{l^2}+\frac{2Pa^3}{l^3}$$

$$=\frac{P}{l^3}(l^3-3a^2l+2a^3) \qquad \text{------ (10)}$$

(10) 式を (9) 式に代入する。

$$X_3=\frac{P}{2l^2}(l^3-3a^2l+2a^3)-\frac{Pl}{2}+Pa-\frac{Pa^2}{2l}$$

$$=\frac{P}{l^2}\left(\frac{l^3}{2}-\frac{3a^2l}{2}+a^3-\frac{l^3}{2}+al^2-\frac{a^2l}{2}\right)$$

$$=\frac{P}{l^2}(-2a^2l+al^2+a^3)$$

$$=\frac{Pa}{l^2}(-2al+l^2+a^2)$$

$$=\frac{Pa}{l^2}\left\{-2(l-b)l+l^2+(l-b)^2\right\}$$

$$=\frac{Pab^2}{l^2} \qquad \text{------ (11)}$$

A 点の曲げモーメントは (1) 式に $x=0$ を代入して

$$M_A=-X_3=-\frac{Pab^2}{l^2} \qquad \text{------ (12)}$$

B 点の曲げモーメントは (2) 式に $x=l$ を代入して

$$M_B=\left\{\frac{P}{l^3}(l^3-3a^2l+2a^3)-P\right\}\cdot l+\left(Pa-\frac{Pab^2}{l^2}\right)$$

$$=\frac{P}{l^2}(l^3-3a^2l+2a^3-l^3+al^2-ab^2)$$

$$=\frac{Pa}{l^2}(-3al+2a^2+l^2-b^2)$$

$$=\frac{Pa}{l^2}\left\{-3a(a+b)+2a^2+(a+b)^2-b^2\right\}$$

$$=-\frac{Pa^2b}{l^2} \qquad \text{------ (13)}$$

C点の曲げモーメントは (2)式に $x=a$ を代入して

$$M_c = (X_2 - P)a + (Pa - X_3)$$

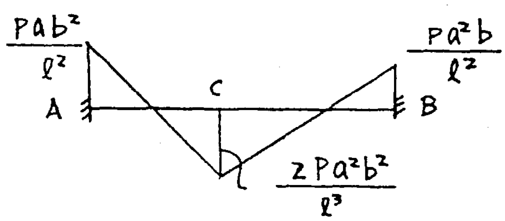
$$= \left\{ \frac{P}{l^3}(l^3 - 3a^2 l + 2a^3) - P \right\} a + Pa - \frac{Pab^2}{l^2}$$

$$= \frac{Pa}{l^3}(l^3 - 3a^2 l + 2a^3 - l^3 + l^3 - b^2 l)$$

$$= \frac{Pa}{l^3}(l^3 - 3a^2 l + 2a^3 - b^2 l)$$

$$= \frac{Pa}{l^3}\left\{(a+b)^3 - 3a^2(a+b) + 2a^3 - b^2(a+b)\right\}$$

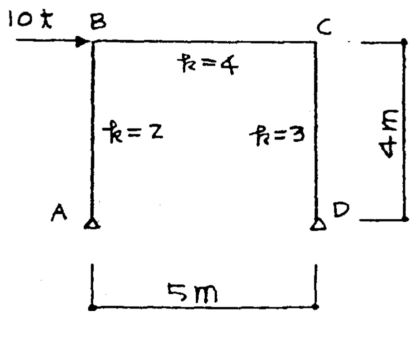
$$= \frac{2Pa^2b^2}{l^3} \qquad \text{-----} (14)$$



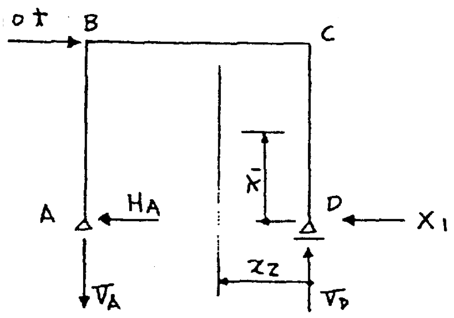
図－5・11 (e)

(例題 5・11)

図の不静定ラーメンの曲げモーメントを求めよ。 柱，梁同素材とする。



図－5・12 (a)



図－5・12 (b)

(解) 1次不静定ラーメンであるから不静定余力は1個とし，静定基本構を左図の様な静定ラーメンとする。D点をローラーとしたが実はピンであるからD点に不静定余力 X_1 を作用させてD点の水平移動を止める。

$\Sigma M_A = 0$ より　$10 \times 4 - 5 V_D = 0$

$V_D = 8t$ （上向き）

$\Sigma Y = 0$ より　$V_A = 8t$ （下向き）

$\Sigma X = 0$ より　$H_A = 10 - X_1$

曲げモーメントの計算

D－C間

$M_{DC} = -X_1 \cdot x_1$　------ (1)

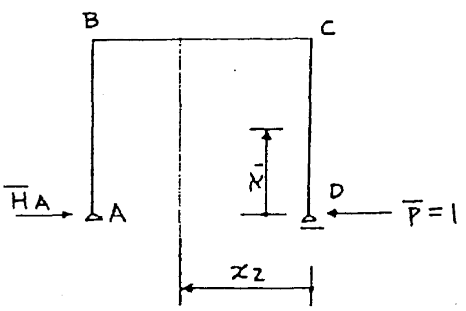
C－B間

$M_{CB} = -4X_1 + 8 \cdot x_2$　------ (2)

A－B間

$M_{AB} = H_A \cdot x_1 = (10 - X_1)x_1$　------ (3)

D点の水平方向の変位 $\delta_D = 0$ でなければならないので，D点に $\bar{P} = 1$ を作用させる。



図－5・12 (c)

$\Sigma X = 0$ より

$\bar{H}_A = 1$

$\bar{V}_A = \bar{V}_D = 0$

D－C間　$\bar{M}_{DC} = -x_1$　----- (4)

C－B間　$\bar{M}_{CB} = -4$　------ (5)

A－B間　$\bar{M}_{AB} = -x_1$　------ (6)

$k = \frac{K}{K_0}$ ，$K = \frac{I}{l}$ だから　$I = klK_0$

従って　$I_{AB} = 2 \times 4 \times K_0 = 8K_0$　$I_{BC} = 4 \times 5 \times K_0 = 20K_0$

$I_{CD} = 3 \times 4 \times K_0 = 12K_0$

D点の変位を求める。

$$\delta_D = \frac{1}{EI_{CD}}\int_D^C M_{DC}\overline{M}_{DC}\,dx_1 + \frac{1}{EI_{CB}}\int_C^B M_{CB}\overline{M}_{CB}\,dx_2 + \frac{1}{EI_{AB}}\int_A^B M_{AB}\overline{M}_{AB}\,dx_1$$

$$EK_0\delta_D = \frac{1}{12}\int_0^4 (-X_1\cdot x_1)(-x_1)\,dx_1 + \frac{1}{20}\int_0^5 (8x_2-4X_1)(-4)\,dx_2$$

$$+\frac{1}{8}\int_0^4 (10-X_1)\,x_1(-x_1)\,dx_1$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^4 X_1\cdot x_1^2\,dx_1 + \frac{1}{20}\int_0^5 (-32x_2+16X_1)\,dx_2 + \frac{1}{8}\int_0^4 -(10-X_1)\,x_1^2\,dx_1$$

$$= \frac{X_1}{12}\left[\frac{1}{3}x_1^3\right]_0^4 - \frac{32}{20}\left[\frac{1}{2}x_2^2\right]_0^5 + \frac{16X_1}{20}\left[x_2\right]_0^5 - \frac{(10-X_1)}{8}\left[\frac{1}{3}x_1^3\right]_0^4$$

$$= \frac{64}{36}X_1 - \frac{800}{40} + \frac{80}{20}X_1 - \frac{64(10-X_1)}{24}$$

$$= \frac{16}{9}X_1 - 20 + 4X_1 - \frac{80}{3} + \frac{16}{6}X_1$$

$$= \frac{76}{9}X_1 - \frac{140}{3} \qquad \text{------ (7)}$$

$\delta_D = 0$ であるから (7) 式より

$$\frac{76}{9}X_1 - \frac{140}{3} = 0$$

$$X_1 = \frac{140}{3}\times\frac{9}{76} = \frac{420}{76} = \frac{105}{19} \qquad \text{------ (8)}$$

B点の曲げモーメントは (3) 式に $x_1 = 4$ を代入して

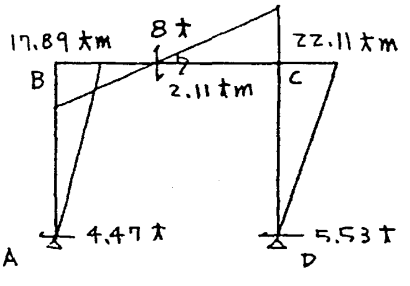
$$M_B = \left(10 - \frac{105}{19}\right)\cdot 4 = \frac{340}{19} \fallingdotseq 17.89\ \text{tm}$$

C点の曲げモーメントは (1) 式に $x_1 = 4\,\text{m}$ を代入して

$$M_C = -\frac{105}{19}\times 4 \fallingdotseq 22.11\ \text{tm}$$

梁中央の曲げモーメントは (2) 式に $x_2 = 2.5\,\text{m}$ を代入して

$$M_{中央} = -4\times\frac{105}{19} + 8\times 2.5 \fallingdotseq -2.11\ \text{tm}$$



図－5・12 (d)

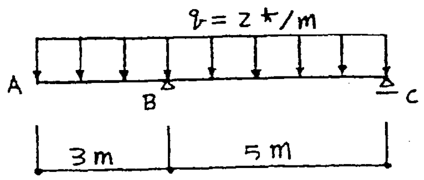
―― 練　習　問　題 ――

（問題 5・1）

図のはね出し式単純梁のA点のたわみを求めよ。

梁はH形鋼で

H－294×200×8×12
　I＝11300 cm^4　　とする。



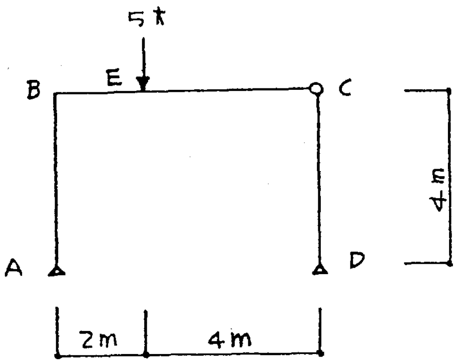
図－5・13

（問題 5・2）

図の静定ラーメンのE点のたわみを求めよ。

柱，梁共H形鋼で

H－244×175×7×11
　I＝6120 cm^4　　とする。

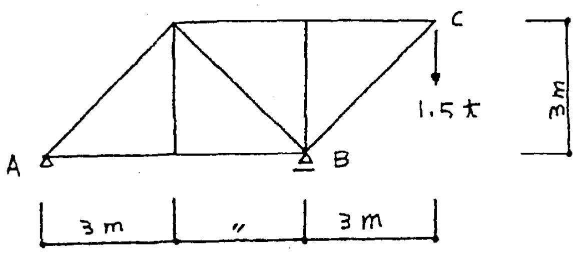


図－5・14

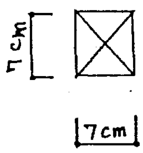
（問題 5・3）

図のトラスのC点の変位を求めよ。

但し断面は木材で全部材共



図－5・15

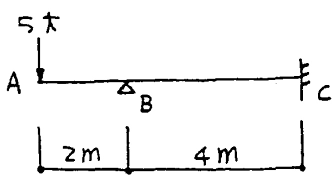


E_w＝70000 kg／cm^2

（問題 5・4）

左図の如き不静定梁の曲げモーメント図を求めよ。

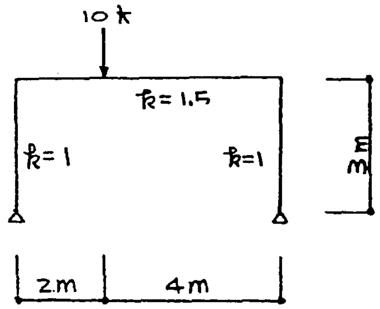
EIは一定とする。



図－5・15

（問題 5・5）

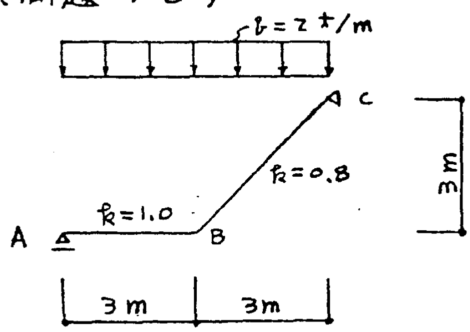
図の不静定ラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



図－5・16

（問題 5・6）

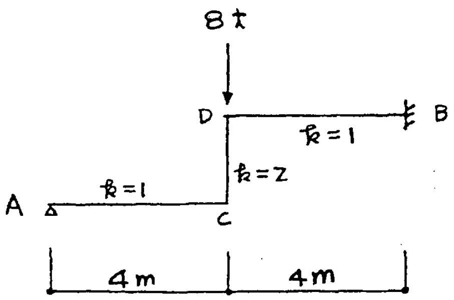
図の不静定梁の曲げモーメント図を求めよ。



図－5・17

（問題 5・7）

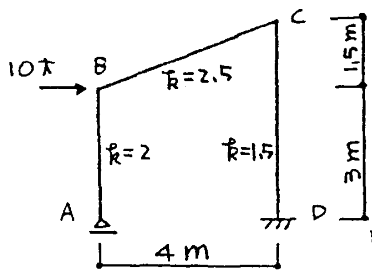
図の不静定梁の曲げモーメント図を求めよ。



図－5・18

（問題 5・8）

左図の不静定ラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



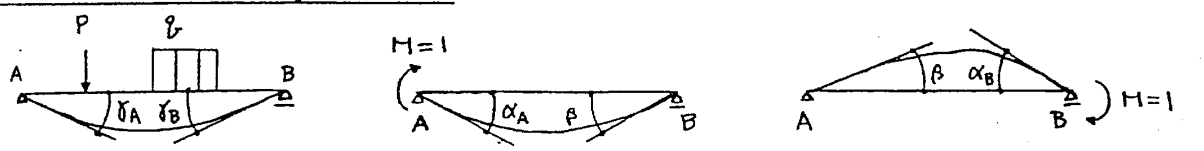
図－5・19

第 6 章　撓角法による不静定梁，矩形ラーメンの解法

6・1 概説

ラーメンの応力解法の中で現在一般的に用いられている手法であろう。部材の伸び・縮みを無視し，たわみ角 (θ) と部材角 (R) を未知数として解く方法である。撓角法 (slope deflection method) は米国のヒッカーソン博士が任意の固定度を有する基本式を提案している。従ってこの方法を「たわみ角法」，「変角法」としている本も多い。撓角法には名著が多く，こゝでの基本式等はそれ等を参照したものである。

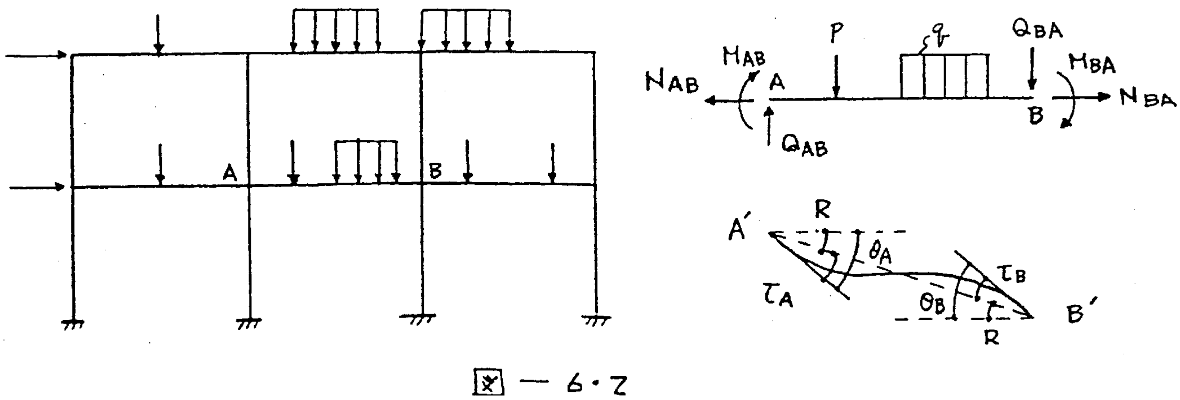
6.2 撓角法の基本式



中間荷重によるたわみ角　　材端モーメントによるたわみ角　　材端モーメントによるたわみ角

図－6・1

上図の如く材端に生ずるたわみ角の要素を3つに分けて考える。今，ラーメンの中の一つの梁を考える。



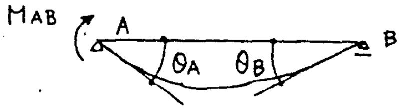
図－6・2

$$\begin{cases} \tau_A = \gamma_A + \alpha_A M_{AB} + \beta M_{BA} & \text{------(6·1)} \\ \tau_B = \gamma_B + \beta M_{AB} + \alpha_B M_{BA} & \text{------(6·2)} \end{cases}$$

尚，図より

$$\left. \begin{aligned} \tau_A &= \theta_A - R \\ \tau_B &= \theta_B - R \end{aligned} \right\} \qquad \text{------(6·3)}$$

材端に曲げモーメントが作用した時のたわみ角の関係は



図−6·3

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \frac{M_{AB}}{3EK} \\ \theta_B &= -\frac{M_{AB}}{6EK} \end{aligned} \right\} \qquad \text{------(6·4)}$$

これを (1)，(2) 式に代入して

$$\tau_A = \gamma_A + \alpha_A M_{AB} + \beta M_{BA} = \gamma_A + \frac{1}{3EK} M_{AB} - \frac{1}{6EK} M_{BA}$$

$$= \gamma_A + \frac{1}{6EK}(2M_{AB} + M_{BA}) \qquad \text{------(6·5)}$$

(3) 式の関係から

$$\theta_A - R = \frac{1}{6EK}(2M_{AB} - M_{BA}) + \gamma_A \qquad \text{------(6·6)}$$

同様にして

$$\theta_B - R = \frac{1}{6EK}(2M_{BA} - M_{AB}) + \gamma_B \qquad \text{------(6·7)}$$

(7)，(8) 式を整理して

$$\begin{cases} 6EK(\theta_A - R - \gamma_A) = 2M_{AB} - M_{BA} & \text{------(6·8)} \\ 6EK(\theta_B - R - \gamma_B) = 2M_{BA} - M_{AB} & \text{------(6·9)} \end{cases}$$

(6·8)×2 ＋ (6·9) として M_{BA} を消去する

$$\begin{array}{rl} & 12EK(\theta_A - R - \gamma_A) = 4M_{AB} - 2M_{BA} \\ +) & 6EK(\theta_B - R - \gamma_B) = 2M_{BA} - M_{AB} \\ \hline & 12EK\theta_A + 6EK\theta_B - 18EKR - 12EK\gamma_A - 6EK\gamma_B = 3M_{AB} \end{array}$$

$$M_{AB} = 4EK\theta_A + 2EK\theta_B - 6EKR - 4EK\gamma_A - 2EK\gamma_B$$

$$= 2EK(2\theta_A + \theta_B - 3R) - 2EK(2\gamma_A + \gamma_B) \qquad \text{------(6·10)}$$

基本撓角式は次式で表わせる。

$$\begin{cases} M_{AB} = 2EK\,(2\theta_A + \theta_B - 3R) + C_{AB} & \text{-------}\ (6\cdot11) \\ M_{BA} = 2EK\,(2\theta_B + \theta_A - 3R) + C_{BA} & \text{-------}\ (6\cdot12) \end{cases}$$

但し
$$\begin{cases} C_{AB} = -2EK\,(2\gamma_A + \gamma_B) \\ C_{BA} = -2EK\,(2\gamma_B + \gamma_A) \end{cases}$$

こゝで C_{AB}, C_{BA} を荷重項(固定端モーメント)という。

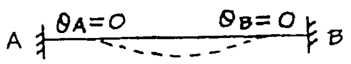
上式を簡単にするため次の様に記号をおきかえる。

$$\begin{cases} 2EK_0\theta_A = \varphi_A \\ 2EK_0\theta_B = \varphi_B \\ K/K_0 = k \\ -6EK_0R = \psi \end{cases}$$

(6·11),(6·12)式は次の如くなる。

$$\begin{cases} M_{AB} = k\,(2\varphi_A + \varphi_B + \psi) + C_{AB} & \text{-------}\ (6\cdot13) \\ M_{BA} = k\,(2\varphi_B + \varphi_A + \psi) + C_{BA} & \text{------}\ (6\cdot14) \end{cases}$$

。両端固定の場合の撓角式



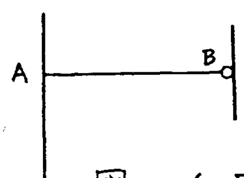
図−6·4

両端固定であるから

$\varphi_A = \varphi_B = 0$, $\psi = 0$ であるから

$$\left.\begin{aligned} M_{AB} &= C_{AB} \\ M_{BA} &= C_{BA} \end{aligned}\right\} \quad \text{-------}\ (6\cdot15)$$

。一端がピン(ローラー)の場合の撓角式



図−6·5

AB材のB端がピンの時 $M_{BA} = 0$ である。

(6·13), (6·14)の基本式より

$$\begin{cases} M_{AB} = k(2\varphi_A + \varphi_B + \psi) + C_{AB} & \text{------ (6·16} \\ M_{BA} = k(2\varphi_B + \varphi_A + \psi) + C_{BA} = 0 & \text{------ (6·17} \end{cases}$$

(6·16) × 2 − (6·17) より φ_B を消去する

$$\begin{array}{rrl} & 2M_{AB} = & k(4\varphi_A + 2\varphi_B + 2\psi) + 2C_{AB} \\ -) & 0 = & k(2\varphi_B + \varphi_A + \psi) + C_{BA} \\ \hline & 2M_{AB} = & k(3\varphi_A + \psi) + 2C_{AB} - C_{BA} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{AB} = k(1.5\varphi_A + 0.5\psi) + C_{AB} - 0.5C_{BA} \\ M_{BA} = 0 \end{array}\right\} \text{----- (6·18}$$

$H_{AB} = C_{AB} - \frac{1}{2}C_{BA}$ とおくとB端ピンの一般式は次の様になる。

$$\left.\begin{array}{l} M_{AB} = k(1.5\varphi_A + 0.5\psi) + H_{AB} \\ M_{BA} = 0 \end{array}\right\} \text{----- (6·19}$$

同様にA端ピンの時は次式となる

$$\left.\begin{array}{l} M_{AB} = 0 \\ M_{BA} = k(1.5\varphi_B + 0.5\psi) + H_{BA} \end{array}\right\} \text{------ (6·20}$$

6·3 解法順序

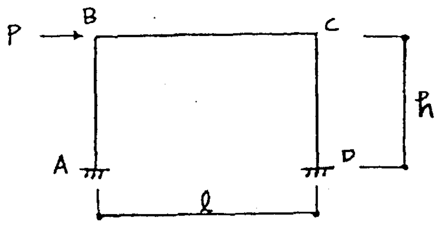
計算順序

(1) 材端モーメント式を作る。

一般の部材は (6·13), (6·14) 式を用い、一端ピンの部材は (6·19), (6·20)式を用いる。

(2) 節点方程式を作る。

節点のモーメントの和は0でなければならない。



図－6.6

例えば左図のラーメンを考えると，

B節点において

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

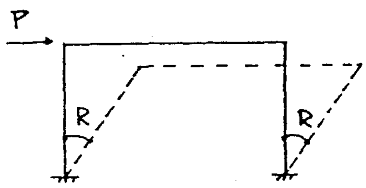
C節点において

$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

の2つの節点方程式が出来る。

(3) せん力方程式（層方程式）を作る。

図－6.6の様な矩形ラーメンの場合，梁に部材角は生じない，柱には部材角Rが生ずる。



図－6.7

この様な場合，柱のせん断力の左右の和は外力（P）に等しい。

柱のせん断力は，柱頭と柱脚のモーメントの和を長さ（h）で割ったものであるから，せん力方程式は

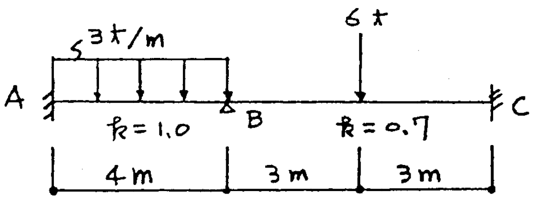
$$\frac{M_{AB}+M_{BA}}{h} + \frac{M_{CD}+M_{DC}}{h} + P = 0$$

$$(M_{AB}+M_{BA}) + (M_{CD}+M_{DC}) = -Ph \quad \text{------ (6.21)}$$

で表わす事が出来る。

(4) 節点方程式とせん力方程式を連立方程式で解き，求めた未知数φ及びψを材端モーメント式に代入する。

（例題 6・1）　図の連続梁の曲げモーメント図を求めよ。



図－6・8 (a)

（解）：支持条件より $\theta_A = \theta_C = 0$ であるから $\varphi_A = \varphi_C = 0$ である。また節点の移動はないので $\psi_{AB} = \psi_{BC} = 0$。

C, M_0, Q_0 を計算する

A－B材

$$C_{AB} = -\frac{3\times4^2}{12} = -4\,tm = -C_{BA}$$

$$M_0 = \frac{3\times4^2}{8} = 6\,tm$$

$$Q_0 = \frac{3\times4}{2} = 6\,ton$$

B－C材

$$C_{BC} = -\frac{6\times6}{8} = -4.5\,tm = -C_{CB}$$

$$M_0 = \frac{6\times6}{4} = 9\,tm$$

$$Q_0 = \frac{6}{2} = 3\,t$$

材端モーメント式を立てる

$$M_{AB} = k(2\varphi_A + \varphi_B + \psi_{AB}) + C_{AB} = \varphi_B - 4$$
$$M_{BA} = k(2\varphi_B + \varphi_A + \psi_{AB}) + C_{BA} = 2\varphi_B + 4$$
$$M_{BC} = k(2\varphi_B + \varphi_C + \psi_{BC}) + C_{BC} = 1.4\varphi_B - 4.5$$
$$M_{CB} = k(2\varphi_C + \varphi_B + \psi_{BC}) + C_{CB} = 0.7\varphi_B + 4.5$$

未知数は φ_B 1個であるからB点の節点方程式を1つ作ればよい。

$\Sigma M_B = 0$ より

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$
$$3.4\varphi_B - 0.5 = 0 \qquad \therefore\ \varphi_B = 0.147$$

φ_B を材端モーメント式に代入する。

$$M_{AB} = 0.147 - 4 = -3.85 \quad (\text{tm})$$
$$M_{BA} = 2 \times 0.147 + 4 = 4.29$$
$$M_{BC} = 1.4 \times 0.147 - 4.5 = -4.29$$
$$M_{CB} = 0.7 \times 0.147 + 4.5 = 4.60$$

A－B材中央のモーメント

$$M_{中央} = M_0 - \frac{M_{AB}+M_{BA}}{2} = 6 - \frac{3.85+4.29}{2} = 1.93 \text{ tm}$$

A－B材のせん断力

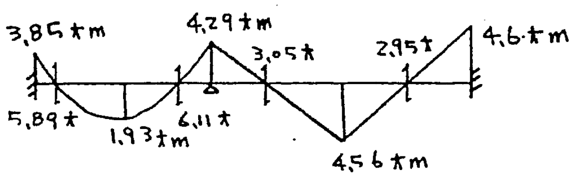
$$Q = Q_0 \pm \frac{4.29-3.85}{4} = 6 \pm 0.11 = 6.11,\ 5.89 \text{ t}$$

B－C材中央のモーメント

$$M_{央} = M_0 - \frac{M_{BC}+M_{CB}}{2} = 9 - \frac{4.29+4.6}{2} = 4.56 \text{ tm}$$

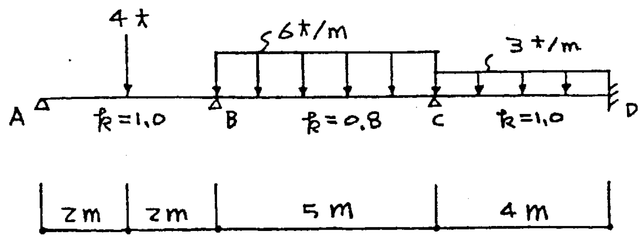
B－C材のせん断力

$$Q = Q_0 \pm \frac{4.6-4.29}{6} = 3 \pm 0.05 = 3.05,\ 2.95 \text{ t}$$



図－6・8 (b)

（例題 6・2）　図の連続梁の曲げモーメント図を求めよ。



図－6・9 (a)

（解）　D端は固定だから $\varphi_D = 0$ である。

節点は移動しないから $\psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = 0$ である。

C, M_0, Q_0の計算

A − B材

$$\begin{cases} H_{BA} = C_{BA} - \frac{1}{2} C_{AB} = \frac{4\times4}{8} - \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{4\times4}{8}\right) = 3\,tm \\ M_0 = \frac{4\times4}{4} = 4\,tm \\ Q_0 = \frac{4}{2} = 2\,t \end{cases}$$

B − C材

$$\begin{cases} C_{BC} = -\frac{6\times5^2}{12} = -12.5\,tm = -C_{CB} \\ M_0 = \frac{6\times5^2}{8} = 18.75\,tm \\ Q_0 = \frac{6\times5}{2} = 15\,t \end{cases}$$

C − D材

$$\begin{cases} C_{CD} = -\frac{3\times4^2}{12} = -4\,tm = -C_{DC} \\ M_0 = \frac{3\times4^2}{8} = 6\,tm \\ Q_0 = \frac{3\times4}{2} = 6\,t \end{cases}$$

材端モーメント式

$M_{AB} = 0$

$M_{BA} = k\,(1.5\varphi_B + 0.5\psi_{AB}) + H_{BA} = 1.5\varphi_B + 3$

$M_{BC} = k\,(2\varphi_B + \varphi_C + \psi_{BC}) + C_{BC} = 1.6\varphi_B + 0.8\varphi_C - 12.5$

$M_{CB} = k\,(2\varphi_C + \varphi_B + \psi_{CB}) + C_{CB} = 0.8\varphi_B + 1.6\varphi_C + 12.5$

$M_{CD} = k\,(2\varphi_C + \varphi_D + \psi_{CD}) + C_{CD} = 2\varphi_C - 4$

$M_{DC} = k\,(2\varphi_D + \varphi_C + \psi_{CD}) + C_{DC} = \varphi_C + 4$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0$ $\quad M_{BA} + M_{BC} = 0$

$3.1\varphi_B + 0.8\varphi_C - 9.5 = 0$ ------- (1)

$\Sigma M_C = 0$ $\quad M_{CB} + M_{CD} = 0$

$0.8\varphi_B + 3.6\varphi_C + 8.5 = 0$ ------ (2)

(1), (2) 式を連立で解く

(1) 式より $\varphi_C = -\frac{3.1}{0.8}\varphi_B + \frac{9.5}{0.8}$ ----- (3)

(3) 式を (2) 式に代入する

$$0.8\varphi_B + 3.6\left(-\frac{3.1}{0.8}\varphi_B + \frac{9.5}{0.8}\right) + 8.5 = 0$$

$$0.8\varphi_B - 13.95\varphi_B + 42.75 + 8.5 = 0$$

$$13.15\varphi_B = 51.25 \qquad \varphi_B = 3.897$$

φ_B を (3) 式に代入する

$$\varphi_C = -\frac{3.1}{0.8}\times 3.897 + \frac{9.5}{0.8} = -15.101 + 11.875$$

$$= -3.226$$

φ_B, φ_C を材端モーメント式に代入する。

$M_{AB} = 0 \quad (\mathrm{tm})$

$M_{BA} = 1.5\times 3.897 + 3 = 8.85$

$M_{BC} = 1.6\times 3.897 - 0.8\times 3.226 - 12.5 = -8.85$

$M_{CB} = 0.8\times 3.897 - 1.6\times 3.226 + 12.5 = 10.45$

$M_{CD} = -2\times 3.226 - 4 = -10.45$

$M_{DC} = -3.226 + 4 = 0.77$

A－B 部材

中央のモーメント

$$M_{中央} = 4 - \frac{8.85}{2} = -0.43\ \mathrm{tm}$$

せん断力（Qmax のみ求める）

$$Q = 2 + \frac{8.85}{4} = 4.21\ \mathrm{t}$$

B－C 部材

中央のモーメント

$$M_{中央} = 18.75 - \frac{8.85 + 10.45}{2} = 9.1\ \mathrm{tm}$$

せん断力

$$Q = 15 + \frac{10.45 - 8.85}{5} = 15.32\ \mathrm{t}$$

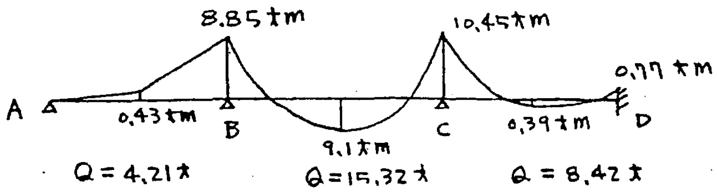
C－D 部材

中央のモーメント

$$M_{中央} = 6 - \frac{10.45 + 0.77}{2} = 0.39\ \mathrm{tm}$$

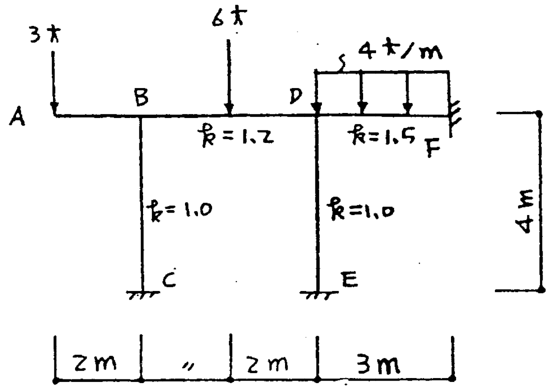
せん断力

$$Q = 6 + \frac{10.45 - 0.77}{4} = 8.42\ \mathrm{t}$$



図－6・9 (b)

（例題 6・3）



図－6.10 (a)

左図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

（解）

境界条件より $\varphi_C = \varphi_E = \varphi_F = 0$ である。

又，節点は移動しないので全ての部材角は 0 である。

C, M_0, Q_0 の計算

A－B 材

$$\begin{cases} M = 3 \times 2 = 6\,tm \\ Q = 3\,t \end{cases}$$

B－D 材

$$\begin{cases} C_{BD} = -\dfrac{6 \times 4}{8} = -3 = -C_{DB} \\ M_0 = \dfrac{6 \times 4}{4} = 6\,tm \\ Q_0 = \dfrac{6}{2} = 3\,t \end{cases}$$

D－F 材

$$\begin{cases} C_{DF} = -\dfrac{4 \times 3^2}{12} = -3\,tm = -C_{FD} \\ M_0 = \dfrac{4 \times 3^2}{8} = 4.5\,tm \\ Q_0 = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6\,t \end{cases}$$

材端モーメント式

$M_{BA} = 6\,tm$

$M_{BC} = k(2\varphi_B + \varphi_C + \psi_{BC}) + C_{BC} = 2\varphi_B$

$M_{BD} = k(2\varphi_B + \varphi_D + \psi_{BD}) + C_{BD} = 2.4\varphi_B + 1.2\varphi_D - 3$

$M_{CB} = k(2\varphi_C + \varphi_B + \psi_{BC}) + C_{CB} = \varphi_B$

$M_{DB} = k(2\varphi_D + \varphi_B + \psi_{DB}) + C_{DB} = 1.2\varphi_B + 2.4\varphi_D + 3$

$M_{DE} = k(2\varphi_D + \varphi_E + \psi_{DE}) + C_{DE} = 2\varphi_D$
$M_{DF} = k(2\varphi_D + \varphi_F + \psi_{DF}) + C_{DF} = 3\varphi_D - 3$
$M_{ED} = k(2\varphi_E + \varphi_D + \psi_{DE}) + C_{ED} = \varphi_D$
$M_{FD} = k(2\varphi_F + \varphi_D + \psi_{DF}) + C_{FD} = 1.5\varphi_D + 3$

未知数は φ_B と φ_D の２つである。

B点の節点方程式

$\Sigma M_B = 0 \qquad M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0$

$$6 + 4.4\varphi_B + 1.2\varphi_D - 3 = 0$$
$$4.4\varphi_B + 1.2\varphi_D = -3 \qquad \text{------ (1)}$$

D点の節点方程式

$\Sigma M_D = 0 \qquad M_{DB} + M_{DE} + M_{DF} = 0$

$$1.2\varphi_B + 2.4\varphi_D + 3 + 2\varphi_D + 3\varphi_D - 3 = 0$$
$$1.2\varphi_B + 7.4\varphi_D = 0 \qquad \text{------ (2)}$$

(1), (2) 式を連立で解く

(1) × 1.2 − (2) × 4.4

$$5.28\varphi_B + 1.44\varphi_D = -3.6$$
$$-)\ \underline{5.28\varphi_B + 32.56\varphi_D = 0}$$
$$-31.12\varphi_D = -3.6 \qquad \therefore \varphi_D = 0.11568$$

φ_D を (1) 式に代入して

$$4.4\varphi_B + 1.2 \times 0.11568 = -3$$
$$\varphi_B = -0.71337$$

φ_B, φ_D を材端モーメント式に代入する

$M_{BA} = 6$ (tm)
$M_{BC} = 2 \times (-0.71337) = -1.43$
$M_{BD} = 2.4 \times (-0.71337) + 1.2 \times 0.11568 - 3 = -4.57$
$M_{CB} = -0.71$
$M_{DB} = 1.2 \times (-0.71337) + 2.4 \times (0.11568) + 3 = 2.42$
$M_{DE} = 2 \times 0.11568 = 0.23$
$M_{DF} = 3 \times 0.11568 - 3 = -2.65$
$M_{ED} = 0.12$
$M_{FD} = 1.5 \times 0.11568 + 3 = 3.17$

B − C 部材のせん断力

$$Q = \frac{1.43 + 0.71}{4} = 0.54\ \text{t}$$

D − E 部材のせん断力

$$Q = \frac{0.23 + 0.12}{4} = 0.11\ \text{t}$$

B − D 部材

$$M_{中央} = 6 - \frac{4.57 + 2.42}{2} = 2.51 \text{ tm}$$

$$Q = 3 + \frac{4.57 - 2.42}{4} = 3.54 \text{ t}$$

D − F 部材

$$M_{中央} = 4.5 - \frac{2.65 + 3.17}{2} = 1.59 \text{ tm}$$

$$Q = 6 + \frac{3.17 - 2.65}{3} = 6.17 \text{ t}$$

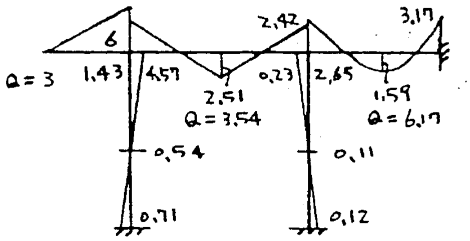


図 − 6・10 (b)

(例題 6・4)

図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

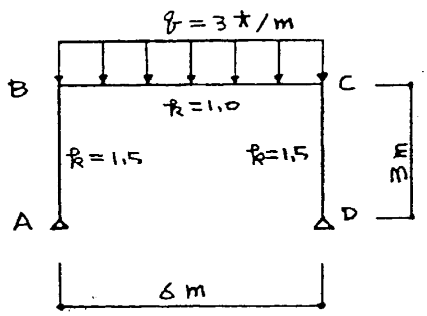


図 − 6・11 (a)

(解) 図のラーメンは骨組みも荷重も対称であるから部材角は生じない。

また $\theta_B = -\theta_C$ であるから $\varphi_B = -\varphi_C$ として，半分だけ計算すればよい。

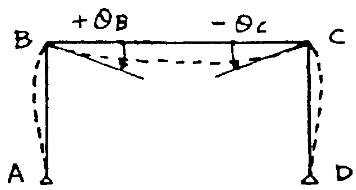


図 − 6・11 (b)

C, M_0, Q_0 の計算

B − C 材

$$C_{BC} = -\frac{3 \times 6^2}{12} = -9 \text{ tm} = -C_{CB}$$

$$M_0 = \frac{3 \times 6^2}{8} = 13.5 \text{ tm}$$

$$Q_0 = \frac{3 \times 6}{2} = 9 \text{ t}$$

材端モーメント式

$M_{AB} = 0$

$M_{BA} = k(1.5\varphi_B + 0.5\psi_{AB}) + H_{BA} = 2.25\varphi_B$

$M_{BC} = k(2\varphi_B + \varphi_C + \psi_{BC}) + C_{BC}$　　$\varphi_C = -\varphi_B$ であるから

$= \varphi_B - 9$

B点の節点方程式

$\Sigma M_B = 0$　　$M_{BA} + M_{BC} = 0$

$3.25\varphi_B - 9 = 0$

$\therefore\ \varphi_B = 2.769$

φ_B を材端モーメント式に代入する。

$M_{AB} = 0$

$M_{BA} = 2.25 \times 2.769 = 6.23$ tm

$M_{BC} = 2.769 - 9 = -6.23$ tm

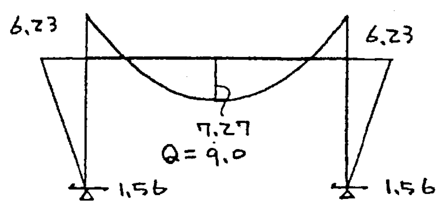
A－B部材のせん断力

$$Q = \frac{6.23}{4} = 1.56\ \text{t}$$

B－C部材

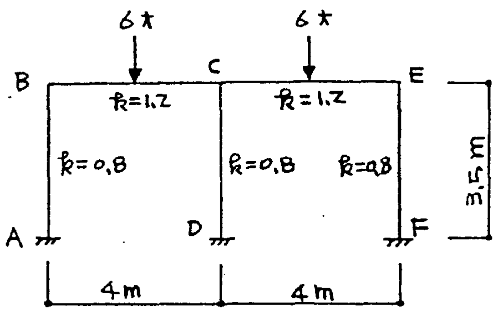
$M_{中央} = 13.5 - 6.23 = 7.27$ tm

$Q = 9$ t　（モーメントに勾配がないからモーメントによるせん断力の付加はない）

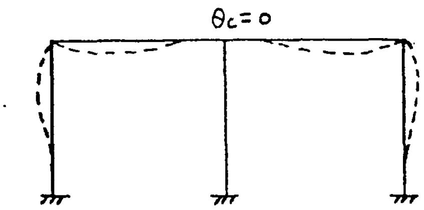


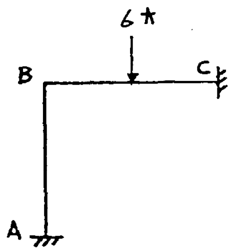
図－6・11（c）

（例題 6・5）



図－6・12 (a)





図－6・12 (b)

図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

（解）

このラーメンはC－Dを軸に対称である。

変形は左図の様になり $\theta_C = 0$ である。

従ってC点を固定として左半分を解けばよい。

A，C端は固定だから $\varphi_A = \varphi_C = 0$ である。

又，節点の移動がないので

$\psi_{AB} = \psi_{BC} = 0$ である。

C, M_0, Q_0 の計算

$$\left\{\begin{aligned} C_{BC} &= -\frac{6 \times 4}{8} = -3\,\mathrm{tm} = -C_{CB} \\ M_0 &= \frac{6 \times 4}{4} = 6\,\mathrm{tm} \\ Q_0 &= \frac{6}{2} = 3\,\mathrm{t} \end{aligned}\right.$$

材端モーメント

$$M_{AB} = k(2\varphi_A + \varphi_B + \psi_{AB}) + C_{AB} = 0.8\varphi_B$$
$$M_{BA} = k(2\varphi_B + \varphi_A + \psi_{AB}) + C_{BA} = 1.6\varphi_B$$
$$M_{BC} = k(2\varphi_B + \varphi_C + \psi_{BC}) + C_{BC} = 2.4\varphi_B - 3$$
$$M_{CB} = k(2\varphi_C + \varphi_B + \psi_{CB}) + C_{CB} = 1.2\varphi_B + 3$$

B点の節点方程式

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$4\varphi_B - 3 = 0 \qquad \therefore\ \varphi_B = 0.75$$

φ_B を材端モーメント式に代入する

$$M_{AB} = 0.8 \times 0.75 = 0.6\ (\text{tm})$$

$$M_{BA} = 1.6 \times 0.75 = 1.2$$

$$M_{BC} = 2.4 \times 0.75 - 3 = -1.2$$

$$M_{CB} = 1.2 \times 0.75 + 3 = 3.9$$

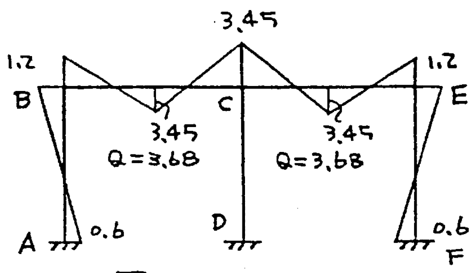
A－B材のせん断力

$$Q = \frac{0.6 + 1.2}{3.5} = 0.51\ \text{t}$$

B－C材

$$M_{中央} = 6 - \frac{1.2 + 3.9}{2} = 3.45\ \text{tm}$$

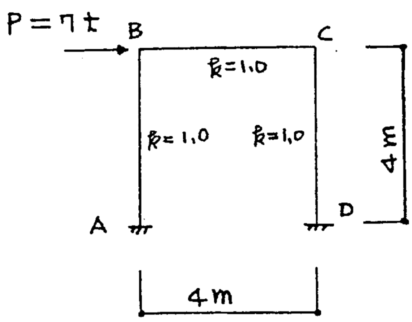
$$Q = 3 + \frac{3.9 - 1.2}{4} = 3.68\ \text{t}$$



図－6・12(c)

（例題6・6）

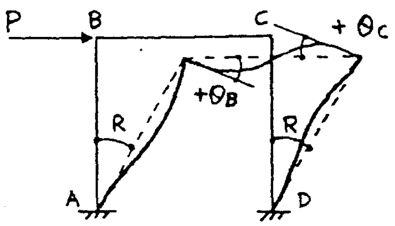
図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



図－6・13(a)

(解) この様なラーメンは中央で逆対称変形をする。

梁のたわみ角は $\theta_B = \theta_C$ となるから $\varphi_B = \varphi_C$ とおいて左半分だけ求める。A端は固定だから $\varphi_A = 0$ である。



図－6・13 (b)

尚，柱に部材角Rが存在する。

部材の中間に荷重がないので荷重項はない。

材端モーメント式

$$M_{AB} = k(2\varphi_A + \varphi_B + \psi_{AB}) + C_{AB} = \varphi_B + \psi_{AB}$$
$$M_{BA} = k(2\varphi_B + \varphi_A + \psi_{AB}) + C_{BA} = 2\varphi_B + \psi_{AB}$$
$$M_{BC} = k(2\varphi_B + \varphi_C + \psi_{BC}) + C_{BC} = 3\varphi_B$$

B点の節点方程式

$\Sigma M_B = 0 \qquad M_{BA} + M_{BC} = 0$

$5\varphi_B + \psi_{AB} = 0$ ------ (1)

せん力方程式

$$2 \times \frac{M_{AB} + M_{BA}}{4} = -7$$ （柱は2本あるから2倍する）

$M_{AB} + M_{BA} = -14$

$3\varphi_B + 2\psi_{AB} = -14$ ------ (2)

(1) 式より　$\psi_{AB} = -5\varphi_B$ ------ (3)

(3) 式を (2) 式に代入する。

$3\varphi_B - 10\varphi_B = -14$

$\varphi_B = 2.0$

φ_B を (3) 式に代入する

$\psi_{AB} = -10$

材端モーメント式に φ_B, ψ_{AB} を代入する。

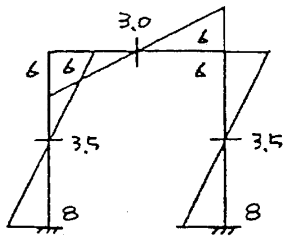
$M_{AB} = 2.0 - 10 = -8$ (tm)

$M_{BA} = 2 \times 2 - 10 = -6$

$M_{BC} = 3 \times 2 = 6$

A－B材のせん断力　$Q = \dfrac{8+6}{4} = 3.5$ t

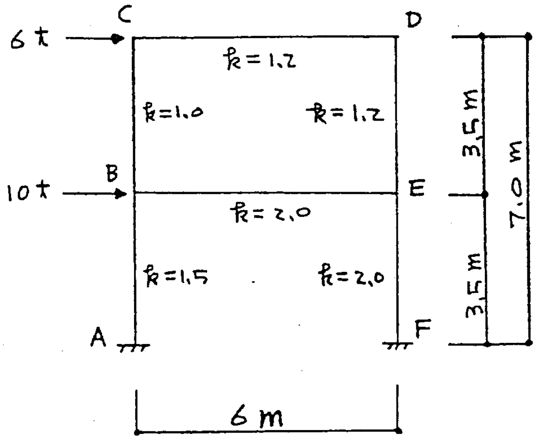
B－C材のせん断力　$Q = \dfrac{6 \times 2}{4} = 3$ t



図－6・13 (c)

(例題 6・7)

図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



図－6・14 (a)

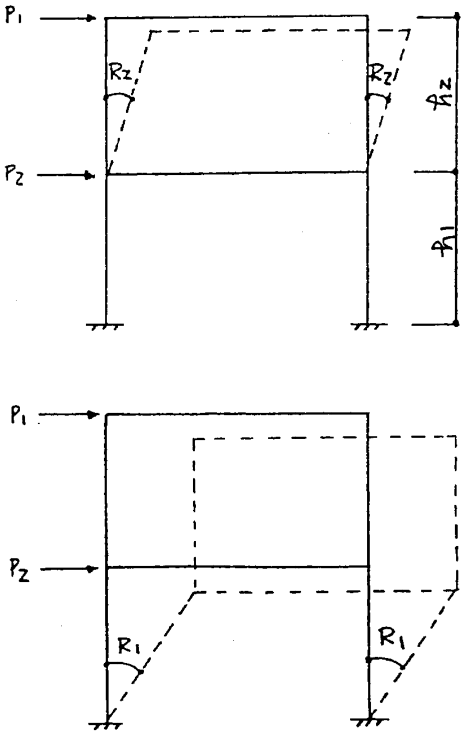
(解) 柱の剛比が左，右対称でないので対称条件は使えない。

A，F端は固定であるから

$\varphi_A = \varphi_F = 0$ である。

せん力方程式について考える。

この様に2階建の場合，2階と1階のせん力方程式をたてる。



$$\underbrace{\frac{M_{BC}+M_{CB}}{h_2}}_{Q_{BC}} + \underbrace{\frac{M_{DE}+M_{ED}}{h_2}}_{Q_{DE}} = -P_1$$

$$\underbrace{\frac{M_{AB}+M_{BA}}{h_1}}_{Q_{AB}} + \underbrace{\frac{M_{EF}+M_{FE}}{h_1}}_{Q_{EF}} = -(P_1+P_2)$$

部材の中間に荷重が作用していないので荷重項は全部材共存在しない。

図－6・14 (b)

材端モーメント式

$$M_{AB} = 1.5(\varphi_B + \psi_1) = 1.5\varphi_B + 1.5\psi_1$$
$$M_{BA} = 1.5(2\varphi_B + \psi_1) = 3\varphi_B + 1.5\psi_1$$
$$M_{BE} = 2.0(2\varphi_B + \varphi_E) = 4\varphi_B + 2\varphi_E$$
$$M_{BC} = 1.0(2\varphi_B + \varphi_C + \psi_2) = 2\varphi_B + \varphi_C + \psi_2$$
$$M_{CB} = 1.0(2\varphi_C + \varphi_B + \psi_2) = \varphi_B + 2\varphi_C + \psi_2$$
$$M_{CD} = 1.2(2\varphi_C + \varphi_D) = 2.4\varphi_C + 1.2\varphi_D$$
$$M_{DC} = 1.2(2\varphi_D + \varphi_C) = 1.2\varphi_C + 2.4\varphi_D$$
$$M_{DE} = 1.2(2\varphi_D + \varphi_E + \psi_2) = 2.4\varphi_D + 1.2\varphi_E + 1.2\psi_2$$
$$M_{ED} = 1.2(2\varphi_E + \varphi_D + \psi_2) = 1.2\varphi_D + 2.4\varphi_E + 1.2\psi_2$$
$$M_{EB} = 2.0(2\varphi_E + \varphi_B) = 2\varphi_B + 4\varphi_E$$
$$M_{EF} = 2.0(2\varphi_E + \psi_1) = 4\varphi_E + 2\psi_1$$
$$M_{FE} = 2.0(\varphi_E + \psi_1) = 2\varphi_E + 2\psi_1$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0$　　$M_{BA} + M_{BE} + M_{BC} = 0$

$9\varphi_B + \varphi_C + 2\varphi_E + 1.5\psi_1 + \psi_2 = 0$ ------ (1)

$\Sigma M_C = 0$　　$M_{CB} + M_{CD} = 0$

$\varphi_B + 4.4\varphi_C + 1.2\varphi_D + \psi_2 = 0$ ------ (2)

$\Sigma M_D = 0$　　$M_{DC} + M_{DE} = 0$

$1.2\varphi_C + 4.8\varphi_D + 1.2\varphi_E + 1.2\psi_2 = 0$ ------ (3)

$\Sigma M_E = 0$　　$M_{ED} + M_{EB} + M_{EF} = 0$

$2\varphi_B + 1.2\varphi_D + 10.4\varphi_E + 2\psi_1 + 1.2\psi_2 = 0$ ------- (4)

せん力方程式

2階　$(M_{BC} + M_{CB}) + (M_{DE} + M_{ED}) = -6 \times 3.5$

$3\varphi_B + 3\varphi_C + 2\psi_2 + 3.6\varphi_D + 3.6\varphi_E + 2.4\psi_2 = -21$

$3\varphi_B + 3\varphi_C + 3.6\varphi_D + 3.6\varphi_E + 4.4\psi_2 = -21$ ----- (5)

1階　$(M_{AB} + M_{BA}) + (M_{EF} + M_{FE}) = -16 \times 3.5$

$4.5\varphi_B + 3\psi_1 + 6\varphi_E + 4\psi_1 = -56$

$4.5\varphi_B + 6\varphi_E + 7\psi_1 = -56$ ------ (6)

6元1次の連立方程式となる。

次頁に方程式の表を作る。

	φ_B	φ_C	φ_D	φ_E	ψ_1	ψ_2	右辺
$\Sigma M_B=0$	9	1		2	1.5	1	0
$\Sigma M_C=0$	1	4.4	1.2			1	0
$\Sigma M_D=0$		1.2	4.8	1.2		1.2	0
$\Sigma M_E=0$	2		1.2	10.4	2	1.2	0
2階	3	3	3.6	3.6		4.4	−21
1階	4.5			6	7		−56

点線について節点方程式は対称でなければならない。

これはどういうラーメン，どういう荷重であっても対称になる。もしならない場合は式が間違っている事である。

6元1次の連立方程式の解をこゝでは電々公社のDEHOSにて求めた。

$\varphi_B = 2.445$　　$\varphi_C = 1.554$　　$\varphi_D = 1.699$

$\varphi_E = 2.97$　　$\psi_1 = -12.117$　　$\psi_2 = -11.319$

これらを材端モーメント式に代入する

$M_{AB} = 1.5 \times 2.445 - 1.5 \times 12.117 = -14.51$ (t·m)

$M_{BA} = 3 \times 2.445 - 1.5 \times 12.117 = -10.84$

$M_{BE} = 4 \times 2.445 + 2 \times 2.97 = 15.72$

$M_{BC} = 2 \times 2.445 + 1.554 - 11.319 = -4.88$

$M_{CB} = 2.445 + 2 \times 1.554 - 11.319 = -5.77$

$M_{CD} = 2.4 \times 1.554 + 1.2 \times 1.699 = 5.77$

$M_{DC} = 1.2 \times 1.554 + 2.4 \times 1.699 = 5.94$

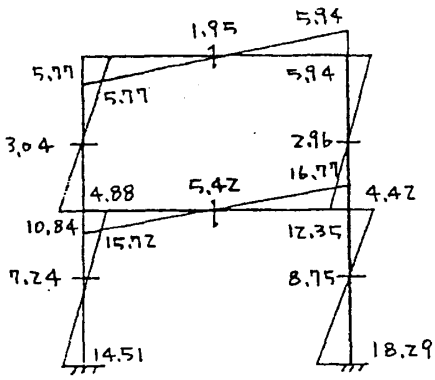
$M_{DE} = 2.4 \times 1.699 + 1.2 \times 2.97 - 1.2 \times 11.319 = -5.94$

$M_{ED} = 1.2 \times 1.699 + 2.4 \times 2.97 - 1.2 \times 11.319 = -4.42$

$M_{EB} = 2 \times 2.445 + 4 \times 2.97 = 16.77$

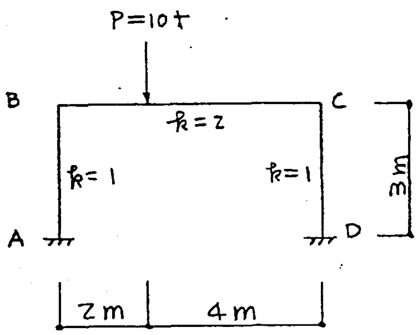
$M_{EF} = 4 \times 2.97 - 2 \times 12.117 = -12.35$

$M_{FE} = 2 \times 2.97 - 2 \times 12.117 = -18.29$



図－6・14（C）

（例題 6・8）　図のラーメンの曲げモーメント図を求め，柱頭の水平変位を求めよ。



図－6・15（a）

（解）　荷重が対称でないので節点に移動が生じる。

C，M_0，Q_0 の計算

$$
\left\{
\begin{aligned}
C_{BC} &= -\frac{10 \times 2 \times 4^2}{6^2} = -8.89\ \mathrm{tm} \\
C_{CB} &= \frac{10 \times 2^2 \times 4}{6^2} = 4.44\ \mathrm{tm} \\
M_0 &= \frac{10 \times 2 \times 4}{6} = 13.33\ \mathrm{tm} \\
Q_{BC} &= \frac{10 \times 4}{6} = 6.67\ \mathrm{t} \qquad Q_{CB} = \frac{10 \times 2}{6} = 3.33\ \mathrm{t}
\end{aligned}
\right.
$$

材端モーメント式

$$M_{AB} = 1.0\,(\varphi_B + \psi_1) = \varphi_B + \psi_1$$
$$M_{BA} = 1.0\,(2\varphi_B + \psi_1) = 2\varphi_B + \psi_1$$
$$M_{BC} = 2\,(2\varphi_B + \varphi_C) - 8.89 = 4\varphi_B + 2\varphi_C - 8.89$$
$$M_{CB} = 2\,(2\varphi_C + \varphi_B) + 4.44 = 2\varphi_B + 4\varphi_C + 4.44$$
$$M_{CD} = 1.0\,(2\varphi_C + \psi_1) = 2\varphi_C + \psi_1$$
$$M_{DC} = 1.0\,(\varphi_C + \psi_1) = \varphi_C + \psi_1$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0$　　$M_{BA} + M_{BC} = 0$

$$6\varphi_B + 2\varphi_C + \psi_1 = 8.89 \qquad \text{-------} \ (1)$$

$\Sigma M_C = 0$　　$M_{CB} + M_{CD} = 0$

$$2\varphi_B + 6\varphi_C + \psi_1 = -4.44 \qquad \text{-------} \ (2)$$

せん力方程式

$$(M_{AB}+M_{BA})+(M_{CD}+M_{DC})=0$$
$$3\varphi_B+2\psi_1+3\varphi_C+2\psi_1=0$$
$$3\varphi_B+3\varphi_C+4\psi_1=0 \qquad \text{--------- (3)}$$

	φ_B	φ_C	ψ_1	右辺
$\Sigma M_B=0$	6	2	1	8.89
$\Sigma M_C=0$	2	6	1	-4.44
1 階	3	3	4	0

3元1次連立方程式を解くと

$\varphi_B=2.009$　　$\varphi_C=-1.324$　　$\psi_1=-0.513$

これらを材端モーメント式に代入する。

(節点が0になってないのは計算誤差による)

$$M_{AB}=2.009-0.513=1.50$$
$$M_{BA}=2\times 2.009-0.513=3.51$$
$$M_{BC}=4\times 2.009-2\times 1.324-8.89=-3.50$$
$$M_{CB}=2\times 2.009-4\times 1.324+4.44=3.16$$
$$M_{CD}=-2\times 1.324-0.513=-3.16$$
$$M_{DC}=-1.324-0.513=-1.84$$

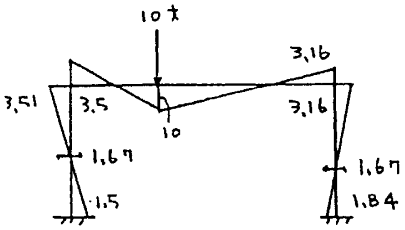


図 − 6・15 (b)

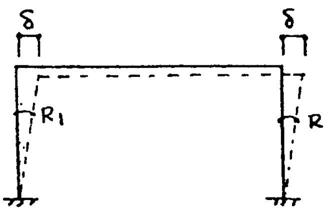


図 − 6・15 (c)

$\psi=-6EK_0R$　(Page 109)

の関係より

$$-0.513=-6EK_0R_1$$
$$\therefore R_1=\frac{0.0855}{EK_0} \quad \text{(正だから時計回り)}$$

$R=\delta/h$ であるから

$$\delta=\frac{0.0855}{EK_0}h$$

── 練 習 問 題 ──

(問題 6・1)

図の連続梁の曲げモーメント図を撓角法で求めよ。

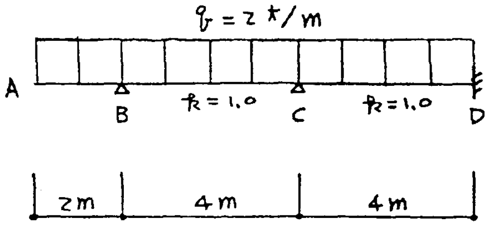


図 ― 6・16

(問題 6・2)

図のラーメンの曲げモーメント図を撓角法で求めよ。

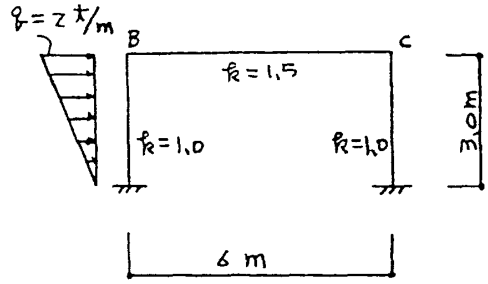


図 ― 6・17

(問題 6・3)

図のラーメンの曲げモーメント図を撓角法で求めよ。

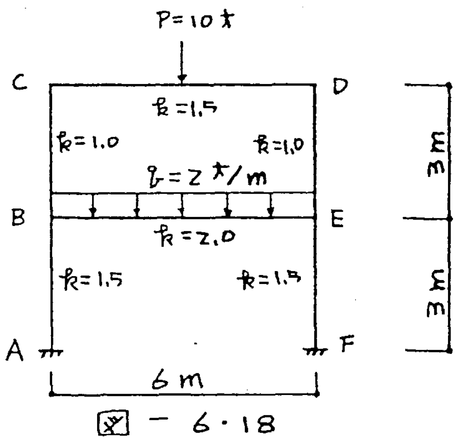


図 ― 6・18

(問題 6・3)

図のラーメンの曲げモーメント図を撓角法で求めよ。

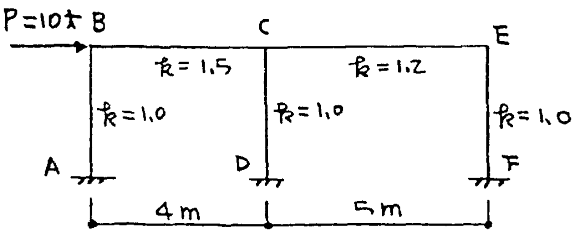


図 ― 6・19

第 7 章　撓角法による異形ラーメンの解法

7・1 概 説

第6章で不静定梁及び矩形ラーメンの解析を行った。

この章では異形ラーメンについて論ずる事にする。

異形ラーメンを解くには，ラーメンの変形を理解する必要がある。ラーメンの変形を理解し「直角変位図」を正しく作成する事が異形ラーメンを解く上での重要なポイントとなる。ラーメンの移動及び直角変位図については二見秀雄著「構造力学演習」：市ヶ谷出版，山本崇著「異形ラーメンと固定モーメント」：理工図書，斉藤謙次著「建築構造力学」：理工図書，その他に詳しく説明してあるので参照されたい。ここでは簡単に論ずるものとする。

異形ラーメンの場合節点方程式は当然従来と同じであるが，力の釣り合い式に仕事法による「外力のなす仕事は内力のなす仕事に等しい」という関係を利用して

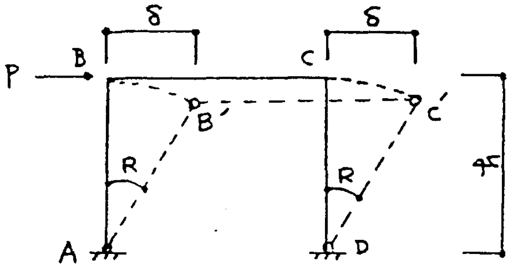
（各部材の材端モーメント）×（部材角）＋外力のモーメント＝0

を用いる。

矩形ラーメンのせん力方程式はこのつり合い式の特別な形である。

7·2　ラーメンの変形問題

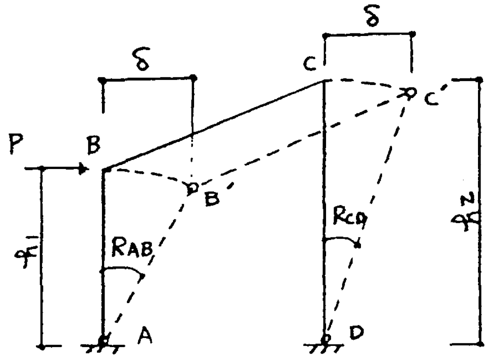
ラーメンの変形を考える場合，全ての節点をピンと仮定し部材の伸び・縮みは考慮しない。



図－7·1

今，図－7·1の様な柱脚固定のラーメンが水平力を受けた場合を考える。A－B材とC－D材の剛性が異なっても水平方向の変位δは等しい。

等しくなければ柱，もしくは梁が破断してしまう事になる。従ってA－B柱も又C－D柱も部材角は　$R_{AB}=R_{CD}=\delta/h$　で表わされる。それは第6章の例題で経験した通りである。



図－7·2

今，図－7·2の様な柱脚固定の片流れラーメンを考えてみる。図からB－C部材は変形後のB'－C'と平行である事が分る。従ってB－C部材に部材角は生じない。

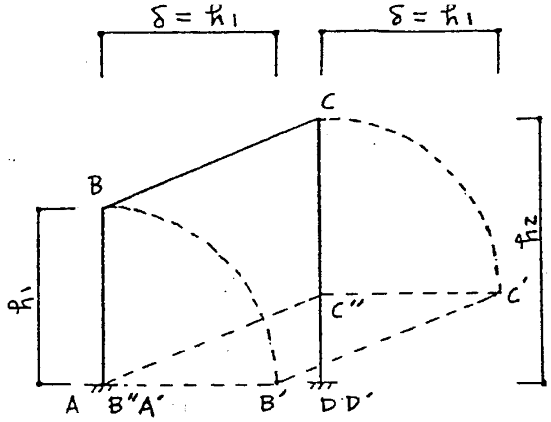
A－B部材とC－D部材にはそれぞれ異なった部材角が生ずる。

$$R_{AB}=\frac{\delta}{h_1}$$

$$R_{CD}=\frac{\delta}{h_2}$$

そうすると，このラーメンの未知数は φ_B，φ_C，Ψ_{AB}，Ψ_{CD} の4つとなる。

しかし，こゝでA－B部材の部材角を基本としてC－D部材の部材角を　$R_{CD}=\alpha\cdot R_{AB}$　で表わせば未知数は3つになる。



図－7・3

今，$R_{AB}=\frac{\delta}{h_1}=1$ 動かした図を図－7・3に示す。

B点はB′点へC点はC′点へ動く。

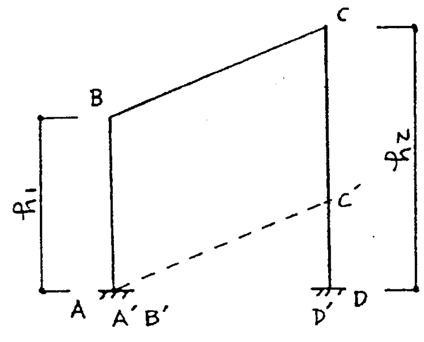
B′及びC′を更に直角にA－B，C－D部材上まで移動させる。

この時のA′B″C″D′（AとB″は同位置）をABCDの直角変位図という。

従って　$R_{AB}=1$ の時　$R_{CD}=\frac{\delta}{h_2}\times\frac{h_1}{\delta}=\frac{h_1}{h_2}$ で表わされる。　A－B柱が R_{AB} 動く時　$R_{CD}=\frac{h_1}{h_2}\cdot R_{AB}$ で表わす事が出来る。　うまく $R_{CD}=\alpha\cdot R_{AB}$ の形で表わす事が出来た。

この時A－B部材を独立変形（回転）部材といい，C－D部材を従属部材という。

以上の事をまとめて次の様に整理出来る。



図－7・4

$R_{AB}=1$　の時の直角変位図を図－7・4の様に表わす。

その時のB－C，C－D部材の部材角は公式として次の様に求める。

$$\left[\begin{array}{l} R_{BC}=1-\frac{B'C'}{BC}=0 \\ R_{CD}=1-\frac{C'D'}{CD}=1-\frac{h_2-h_1}{h_2}=\frac{h_1}{h_2} \end{array}\right.$$

もしこの様な直角変位図においてもC′がD点より下（C－D部材の延長線上）に表われる様な時には　$R_{CD}=1+\frac{C'D'}{CD}$ とする

独立部材について考える。

複雑なラーメンにおいて独立部材はいくつ必要かを知る必要がある。

先に述べた松本崇著「異形ラーメンと固定モーメント」では

独立部材の数＝部材数－２×（ラーメン閉鎖形の数）

と論じている。

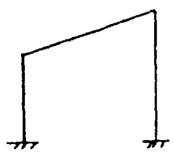
独立部材の数だけ力のつり合い式が必要となる。

又，独立部材を選ぶには全部材が動く様に選ばなければならない。　以上簡単に説明したが詳しくは先に述べた参考図書を参考されたい。

以下例題を中心に解説する。

（例題７・１）　図のラーメンの独立部材の数を求めよ。

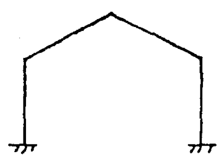
（a）



部材数＝３
ラーメン閉鎖形の数＝１

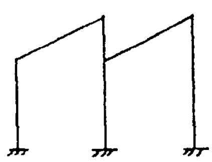
独立部材の数 $(n) = 3-2\times1 = 1$ 個

（b）



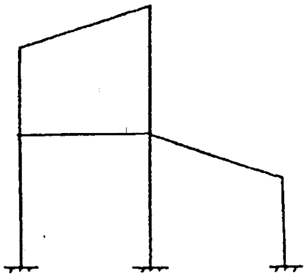
$n = 4 - 2\times1 = 2$ 個

（c）



$n = 6 - 2\times2 = 2$ 個

(d)



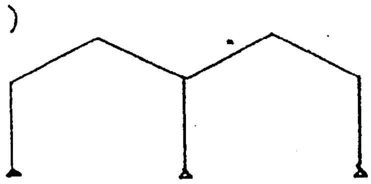
$n = 8 - 2 \times 3 = 2$ 個

(e)

$n = 3 - 2 \times 1 = 1$ 個

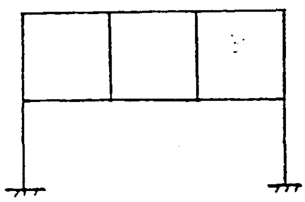
この様なタイプの時はラーメン閉鎖形の数を1と数える。

(f)



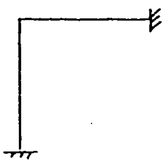
$n = 7 - 2 \times 2 = 3$ 個

(g)



$n = 12 - 2 \times 4 = 4$ 個

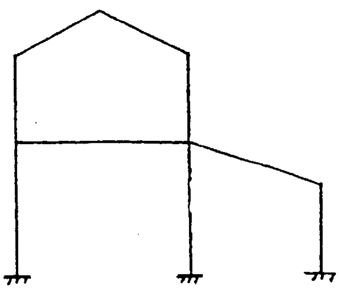
(h)



$n = 2 - 2 \times 1 = 0$

全部材共部材角は生じない

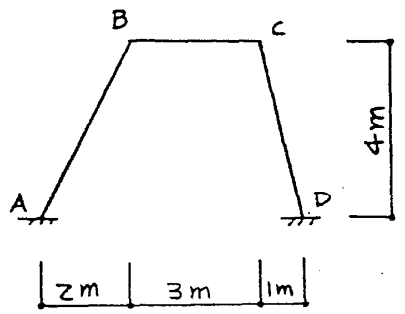
(i)



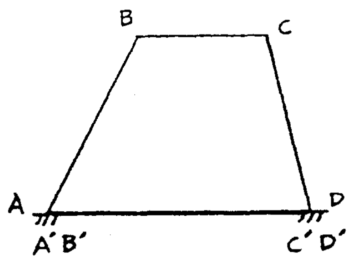
$n = 9 - 2 \times 3 = 3$ 個

例題7・2) 図のラーメンの直角変位図を書き，独立変形部材と従属部材の回転角の関係を求めよ。

(a)



図－7・5 (a)



直角変位図
図－7・5 (b)

(解) 独立部材の数

$n = 3 - 2 \times 1 = 1$ 個

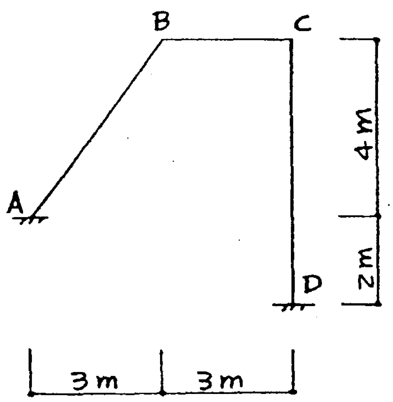
A－B部材を独立変形部材にとり $R_{AB} = 1$ とした時の直角変位図を左図に示す。

$R_{AB} = 1$ の時の部材角の関係は

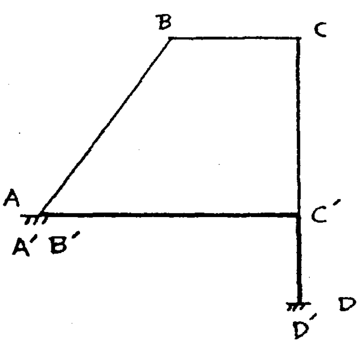
$$\begin{cases} R_{BC} = 1 - \dfrac{B'C'}{BC} = 1 - \dfrac{6}{3} = -1 \\ R_{CD} = 1 - \dfrac{C'D'}{CD} = 1 \end{cases}$$

(注) $R_{CD} = 1$ の時の直角変位図も左図と同じになる。

(b)



図－7・6 (a)



直角変位図
図－7・6 (b)

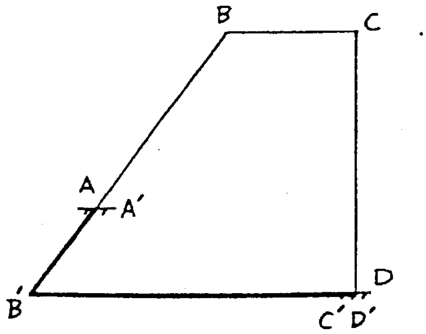
(解) 独立部材の数

$n = 3 - 2 \times 1 = 1$ 個

$R_{AB} = 1$ とした時の直角変位図を図－7・6 (b) に示す。

$R_{AB} = 1$ の時の部材角の関係は

$$\begin{cases} R_{BC} = 1 - \dfrac{B'C'}{BC} = 1 - \dfrac{6}{3} = -1 \\ R_{CD} = 1 - \dfrac{C'D'}{CD} = 1 - \dfrac{2}{6} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$



直角変位図
図－7・6 (c)

（別解）

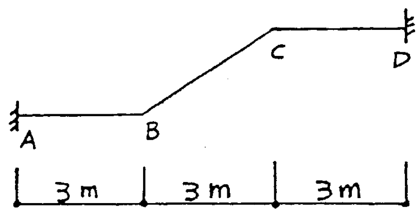
$R_{CD}=1$ とした時の直角変位図を図－7・6 (c) に示す。この時の従属部材の関係は

$$R_{BC}=1-\frac{B'C'}{BC}=1-\frac{7.5}{3}=-1.5$$

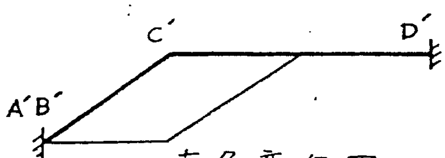
$$R_{AB}=1+\frac{A'B'}{AB}=1+\frac{2.5}{5}=1.5$$

（注） R_{AB} に於て B' 点が A 点の反対に来ているから符号は (+) とする。

(c)



図－7・7 (a)



直角変位図
図－7・7 (b)

（解） 独立部材の数

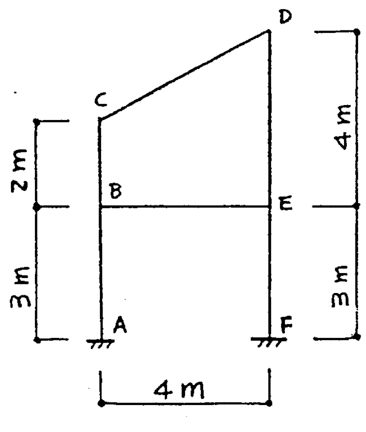
$n=3-2\times1=1$ 個

$R_{AB}=1$ とした時の直角変位図を図－7・7 (b) に示す。

$R_{AB}=1$ とした時の従属部材の関係は

$$\begin{cases} R_{BC}=1-\dfrac{B'C'}{BC}=1-1=0 \\ R_{CD}=1-\dfrac{C'D'}{CD}=1-\dfrac{6}{3}=-1 \end{cases}$$

(d)

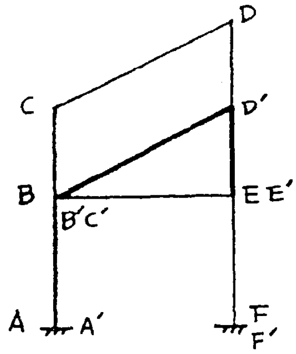


図－7・8 (a)

（解） 独立部材の数

$n=6-2\times2=2$ 個

この様な場合，2階と1階の柱から1つずつ独立変形部材を選ぶ。ここではB－C部材とA－B部材を独立変形部材として求める。

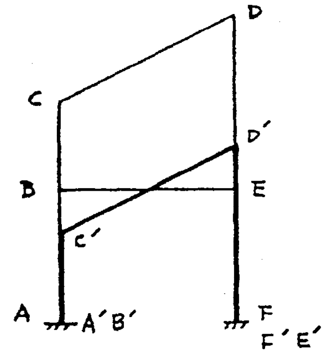


直角変位図
図－7・8 (b)

(Case－1)　$R_{BC}=1$　の時の直角変位図を図－7・8 (b) に示す。

2階だけ動くが1階は動かない。

$$\left[\begin{array}{l} R_{CD}=1-\dfrac{C'D'}{CD}=1-1=0 \\ R_{DE}=1-\dfrac{D'E'}{DE}=1-\dfrac{2}{4}=0.5 \\ R_{AB}=R_{BE}=R_{EF}=0 \end{array}\right.$$



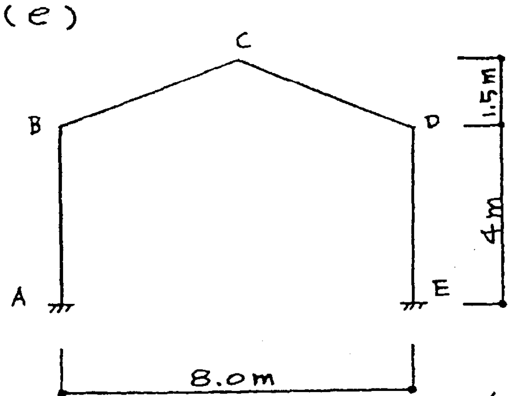
直角変位図
図－7・8 (c)

(Case－2)　$R_{AB}=1$　の時の直角変位図を図－7・8 (c) に示す。

1階だけ動くが2階は動かない。

$$\left[\begin{array}{l} R_{EF}=1-\dfrac{E'F'}{EF}=1-0=1 \\ R_{BE}=1-\dfrac{B'E'}{BE}=0 \\ R_{BC}=R_{CD}=R_{DE}=0 \end{array}\right.$$

(e)



図－7・9 (a)

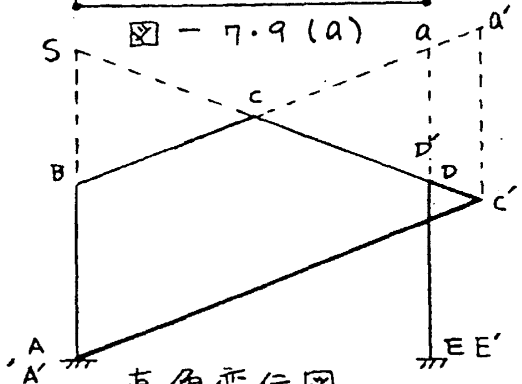
(解) 独立部材の数

$n=4-2\times1=2$ 個

A－B部材とD－E部材を独立変形部材として考える。

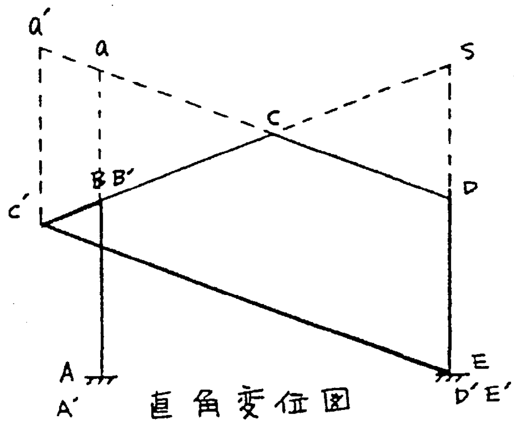
(Case－1)

$R_{AB}=1$　とした時の直角変位図を図－7・9 (b) に示す。



直角変位図
図－7・9 (b)

$$\left[\begin{array}{l} R_{BC}=1-\dfrac{B'C'}{BC}=1-\dfrac{SA}{SB} \\ \qquad =1-\dfrac{7}{3}=-\dfrac{4}{3} \\ R_{CD}=1+\dfrac{C'D'}{CD}=\dfrac{CC'}{CD}=\dfrac{a'C'}{aD}=\dfrac{4}{3} \\ R_{DE}=0 \end{array}\right.$$



直角変位図
図－7・9（c）

（Case－2）　$R_{DE}=1$　の時

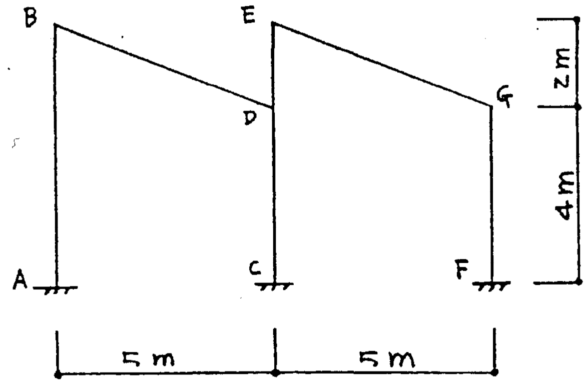
図－7・9（b）と同様に補助線を引いて求める。

$$R_{BC}=1+\frac{B'C'}{BC}=\frac{CC'}{BC}=\frac{a'c'}{aB}=\frac{4}{3}$$

$$R_{CD}=1-\frac{C'D'}{CD}=1-\frac{SE}{SD}=1-\frac{7}{3}=-\frac{4}{3}$$

$$R_{AB}=0$$

（チ）



図－7・10（a）

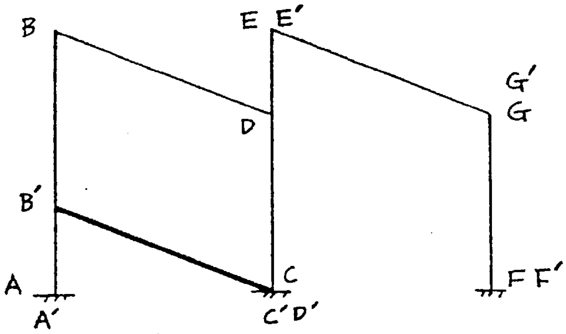
（解）　独立部材の数

$n=6-2\times 2=2$ 個

C－D部材とF－G部材を独立変形部材とする。

（Case－1）

$R_{CD}=1$　の時の直角変位図を図－7・10（b）に示す。



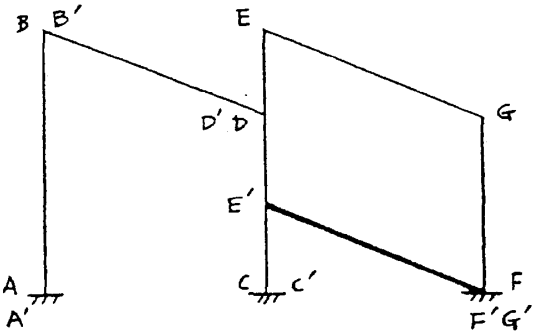
直角変位図
図－7・10（b）

$$R_{AB}=1-\frac{A'B'}{AB}=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$$

$$R_{BD}=1-\frac{B'D'}{BD}=0$$

$$R_{DE}=1-\frac{D'E'}{DE}=1-\frac{6}{2}=-2$$

$$R_{EG}=R_{FG}=0$$



直角変位図
図－7・10 (C)

(Case－2)

$R_{FG}=1$ の時の直角変位図を図－7・10 (C) に示す。

$$
\left[\begin{array}{l}
R_{EG}=1-\dfrac{E'G'}{EG}=0 \\
R_{DE}=1+\dfrac{D'E'}{DE}=1+\dfrac{2}{2}=2 \\
R_{CD}=1-\dfrac{C'D'}{CD}=0 \\
R_{BD}=R_{AB}=0
\end{array}\right.
$$

7・3 解法順序

計算順序

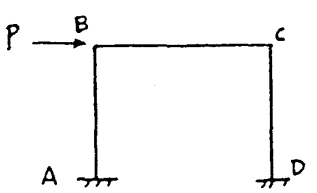
(1) 独立変形部材の数を求める。

(2) 独立変形部材の数だけ直角変位図を作り，それぞれの独立変形部材に対しての従属部材の部材角の関係を求める。この時，直角変位図作成時に荷重Pの動いた距離Cも求めておく。分布荷重の時はその合力の位置にその部分の合力(P)が作用しているものと考える。

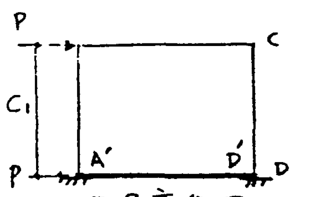
(3) 材端モーメント式を作成する。

(4) 節点方程式を作成する。

(5) 独立部材の数だけ力の釣り合い式を作る。



図－7・11 (a)



直角変位図
図－7・11 (b)

今，図－7・11 (a) の様な門形ラーメンについて考える。

$R_{AB}=1$ とした時の直角変位図は図－7・11(b) の様になる。

この時の従属部材の関係は

$$\left[\begin{array}{l} R_{BC}=0 \\ R_{CD}=1 \end{array}\right.$$

となる。

仕事式より「内力のなす仕事は外力のなす仕事に等しい」が言えるから次式が言える。

$$(M_{AB}+M_{BA})\times R_{AB}+(M_{BC}+M_{CB})\times R_{BC}+(M_{CD}+M_{DC})\times R_{CD}+PC=0$$

これに部材角を代入する（$R_{BC}=0$, $C=h$）。

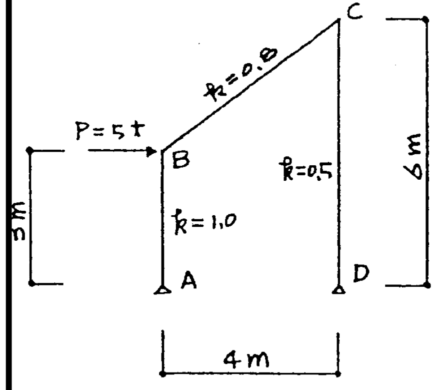
$$(M_{AB}+M_{BA})\times 1+(M_{CD}+M_{DC})=-Ph$$

これは第6章でせん力方程式（層方程式）と呼んだ。

複雑なラーメンでは，この様な釣り合い式が独立変形部材の数だけ必要となる。

荷重がB点に作用しているが，直角変位図を画いたらB′点に移動する事になる。 もとのPと移動後の垂直距離（モーメントを求める時と同じ様に最小距離）の積 P・C はPの移動後の点を中心に時計回りを正(+)，反時計回りを負(−)として表わす。 一般には独立変形部材の数だけ P・C は存在するが，後の例題に出てくるが C＝0 の場合はその限りではない。 以下例題を解きながら理解されたい。

（例題 7・3）



図－7・12 (a)

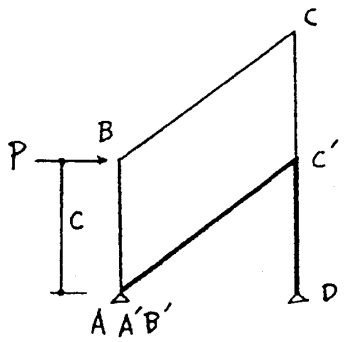
左図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

（解）　独立変形部材の数

$n = 3 - 2 \times 1 = 1$

A－B材を独立変形部材とする。

$R_{AB} = 1$ とした時の直角変位図を図－7・12 (b) に示す。



$R_{AB} = 1$

図－7・12 (b)

部材角の関係

（Case－1）

$R_{AB} = 1$ の時

$C = 3m$ （P の移動距離）

$$\left[\begin{array}{l} R_{BC} = 0 \\ R_{CD} = 1 - \dfrac{C'D'}{CD} = 1 - \dfrac{3}{6} = 0.5 \end{array}\right.$$

従って

$\psi_{BC} = 0$

$\psi_{CD} = 0.5\,\psi_{AB}$

材端モーメント式

$M_{AB} = 0$

$M_{BA} = 1.0(1.5\varphi_B + 0.5\psi_{AB}) = 1.5\varphi_B + 0.5\psi_{AB}$

$M_{BC} = 0.8(2\varphi_B + \varphi_C) = 1.6\varphi_B + 0.8\varphi_C$

$M_{CB} = 0.8(2\varphi_C + \varphi_B) = 0.8\varphi_B + 1.6\varphi_C$

$M_{CD} = 0.5(1.5\varphi_C + 0.5\psi_{CD}) = 0.5(1.5\varphi_C + 0.25\psi_{AB}) = 0.75\varphi_C + 0.125\psi_{AB}$

$M_{DC} = 0$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0$　　$M_{BA} + M_{BC} = 0$

$3.1\varphi_B + 0.8\varphi_C + 0.5\psi_{AB} = 0$　　------ (1)

$\Sigma M_C = 0$　　$M_{CB} + M_{CD} = 0$

$0.8\varphi_B + 2.35\varphi_C + 0.125\psi_{AB} = 0$　　------ (2)

力の釣り合い式

Case－1

$$(M_{AB}+M_{BA})\times R_{AB}+(M_{BC}+M_{CB})\times R_{BC}+(M_{CD}+M_{DC})\times R_{CD}=-P\,C$$

$$(1.5\varphi_B+0.5\psi_{AB})\times 1+(0.75\varphi_C+0.125\psi_{AB})\times 0.5=-5\times 3$$

$$1.5\varphi_B+0.5\psi_{AB}+0.375\varphi_C+0.0625\psi_{AB}=-15$$

$$1.5\varphi_B+0.375\varphi_C+0.5625\psi_{AB}=-15 \qquad \text{-------}\ (3)$$

	φ_B	φ_C	ψ_{AB}	右辺
$\Sigma M_B=0$	3.1	0.8	0.5	0
$\Sigma M_C=0$	0.8	2.35	0.125	0
Case－1	1.5	0.375	0.5625	−15

連立方程式を解くと　$\varphi_B=7.57$

$\varphi_C=-0.09$

$\psi_{AB}=-46.8$

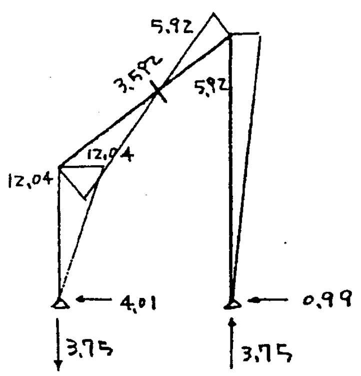
これを材端モーメント式に代入する。

$$M_{BA}=1.5\times 7.57-0.5\times 46.8=-12.04 \quad (\text{t}\cdot\text{m})$$

$$M_{BC}=1.6\times 7.57-0.8\times 0.09=12.04$$

$$M_{CB}=1.6\times(-0.09)+0.8\times 7.57=5.92$$

$$M_{CD}=0.75\times(-0.09)-0.125\times 46.8=5.92$$



M − D

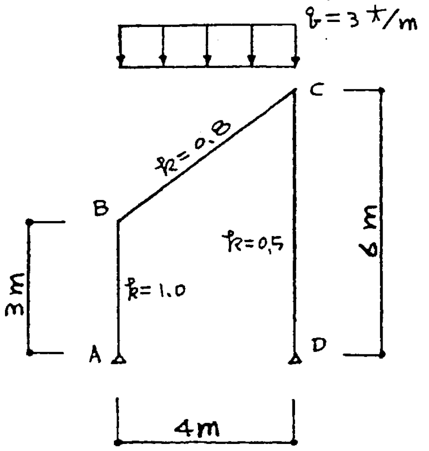
図－7・12 (C)

$$H_A=\frac{12.04}{3}=4.01\,\text{t}$$

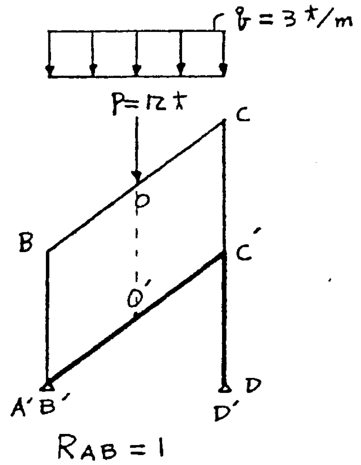
$$H_D=\frac{5.92}{6}=0.99\,\text{t}$$

$$-V_A=V_D=\frac{5\times 3}{4}=3.75\,\text{t}$$

（例題 7・4）



図－7・13（a）



$R_{AB}=1$

図－7・13（b）

左図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

（解）　例題 7・3 と同じラーメンであるから，独立変形部材には同じ様に A－C 材をとる。

直角変位図も部材角も同様となるが，C が異なる。

$R_{AB}=1$ の直角変位図を図－7・13（b）に示す。

分布荷重の場合合力の作用位置に合力（$P=12t$）を作用させ，その作用点 O と移動後の作用点 O′ の距離を c とする。この場合 $c=0$ である。

部材角の関係

$R_{AB}=1$，$c=0$ の時 $\begin{cases} R_{BC}=0 \\ R_{CD}=0.5 \end{cases}$

従って　$\Psi_{BC}=0$，$\Psi_{CD}=0.5\Psi_{AB}$

C，H_0，Q_0 の計算

B－C 部材

$$\begin{cases} C_{BC}=-\dfrac{3\times4^2}{12}=-4tm=-C_{CB} \\ H_0=\dfrac{3\times4^2}{8}=6tm \\ Q_0=\dfrac{3\times4}{2}=6t \end{cases}$$

材端モーメント式

$M_{AB} = 0$
$M_{BA} = 1.0\,(1.5\varphi_B + 0.5\,\Psi_{AB}) = 1.5\varphi_B + 0.5\,\Psi_{AB}$
$M_{BC} = 0.8\;(2\varphi_B + \varphi_C) - 4 = 1.6\varphi_B + 0.8\varphi_C - 4$
$M_{CB} = 0.8\;(2\varphi_C + \varphi_B) + 4\; = 0.8\varphi_B + 1.6\varphi_C + 4$
$M_{CD} = 0.5\;(1.5\varphi_C + 0.5\,\Psi_{CD}) = 0.5\;(1.5\varphi_C + 0.25\,\Psi_{AB}) = 0.75\varphi_C + 0.125\,\Psi_{AB}$
$M_{DC} = 0$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0 \quad M_{BA} + M_{BC} = 0$
$3.1\varphi_B + 0.8\varphi_C + 0.5\,\Psi_{AB} = 4$ ------ (1)

$\Sigma M_C = 0 \quad M_{CB} + M_{CD} = 0$
$0.8\varphi_B + 2.35\varphi_C + 0.125\,\Psi_{AB} = -4$ ------ (2)

力のつり合い式

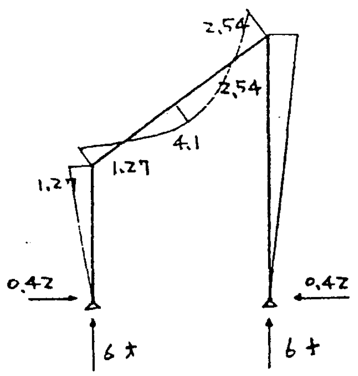
Case－1
$(M_{AB} + M_{BA}) \times R_{AB} + (M_{BC} + M_{CB}) \times R_{BC} + (M_{CD} + M_{DC}) \times R_{CD} = 0$
$M_{BA} \times 1 + M_{CD} \times 0.5 = 0$
$1.5\varphi_B + 0.375\varphi_C + 0.5625\,\Psi_{AB} = 0$ -------- (3)

	φ_B	φ_C	Ψ_{AB}	右辺
$\Sigma M_B=0$	3.1	0.8	0.5	4
$\Sigma M_C=0$	0.8	2.35	0.125	−4
Case−1	1.5	0.375	0.5625	0

連立に解いて $\varphi_B = 2.887 \qquad \varphi_C = -2.359 \qquad \Psi_{AB} = -6.127$

材端モーメント式に代入する。

$M_{BA} = 1.5 \times 2.887 - 0.5 \times 6.127 = 1.27$ (tm)
$M_{BC} = 1.6 \times 2.887 - 0.8 \times 2.359 - 4 = -1.27$
$M_{CB} = 0.8 \times 2.887 - 1.6 \times 2.359 + 4 = 2.54$
$M_{CD} = -0.75 \times 2.359 - 0.125 \times 6.127 = -2.54$



H − D

図 − 7.13 (c)

$$H_A = -H_D = \frac{1.27}{3} = 0.42\ t$$

$$V_A = V_D = 6\ t$$

$$M_{中央} = 6 - \frac{1.27+2.54}{2} = 4.1\ tm$$

(例題 7.5)

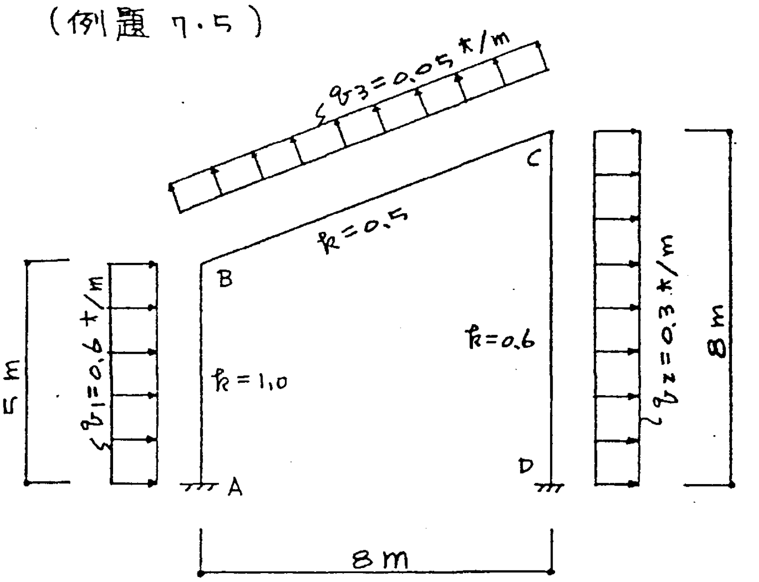
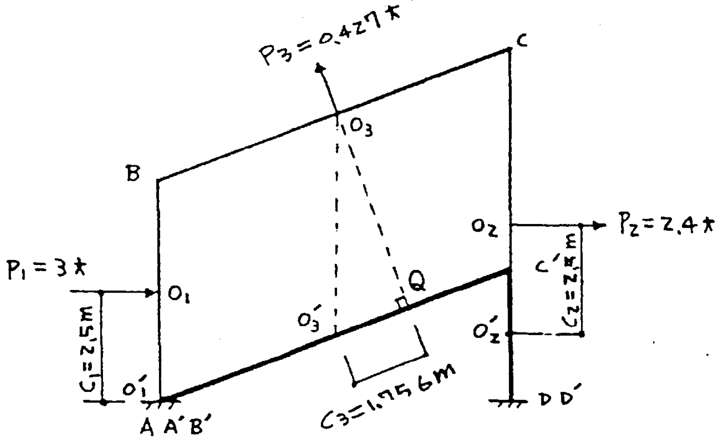


図 − 7・14 (a)

左図のラーメンが風圧力を受ける時の曲げモーメントを求めよ。

(解)

独立変形部材をA−B材にとり，$R_{AB} = 1$ とした時の直角変位図を図−7・14 (b) に示す。



$R_{AB} = 1$

図 − 7・14 (b)

Cの計算

$C_1 = C_2 = 2.5\ m$

C_3 の求め方

△$O_3O_3'Q$ ∽ △$A'C'D'$ であるから

$5 : C_3 = 8.544 : 3$

$C_3 = 1.756\ m$

部材角の関係

$R_{AB}=1$ の時 $\left[\begin{array}{l} R_{BC}=0 \\ R_{CD}=1-\dfrac{3}{8}=0.625 \end{array}\right.$

従って $\psi_{BC}=0$, $\psi_{CD}=0.625\,\psi_{AB}$

C, M_0, Q_0 の計算

A－B部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{AB}=-\dfrac{0.6\times5^2}{12}=-1.25\,tm=-C_{BA} \\ M_0=\dfrac{0.6\times5^2}{8}=1.875\,tm \\ Q_0=\dfrac{0.6\times5}{2}=1.5\,t \end{array}\right.$$

B－C部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{BC}=\dfrac{0.05\times8.544^2}{12}=0.304\,tm=-C_{CB} \\ M_0=\dfrac{0.05\times8.544^2}{8}=0.456\,tm \\ Q_0=\dfrac{0.05\times8.544}{2}=0.214\,t \end{array}\right.$$

C－D部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{CD}=\dfrac{0.3\times8^2}{12}=1.6\,tm=-C_{DC} \\ M_0=\dfrac{0.3\times8^2}{8}=2.4\,tm \\ Q_0=\dfrac{0.3\times8}{2}=1.2\,t \end{array}\right.$$

材端モーメント式

$$M_{AB}=1.0(\varphi_B+\psi_{AB})-1.25=\varphi_B+\psi_{AB}-1.25$$
$$M_{BA}=1.0(2\varphi_B+\psi_{AB})+1.25=2\varphi_B+\psi_{AB}+1.25$$
$$M_{BC}=0.5(2\varphi_B+\varphi_C)+0.304=\varphi_B+0.5\varphi_C+0.304$$
$$M_{CB}=0.5(2\varphi_C+\varphi_B)-0.304=0.5\varphi_B+\varphi_C-0.304$$
$$M_{CD}=0.6(2\varphi_C+\psi_{CD})+1.6=1.2\varphi_C+0.375\psi_{AB}+1.6$$
$$M_{DC}=0.6(\varphi_C+\psi_{CD})-1.6=0.6\varphi_C+0.375\psi_{AB}-1.6$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0 \qquad M_{BA} + M_{BC} = 0$

$$3\varphi_B + 0.5\varphi_C + \psi_{AB} = -1.554 \qquad \text{------} \quad (1)$$

$\Sigma M_C = 0 \qquad M_{CB} + M_{CD} = 0$

$$0.5\varphi_B + 2.2\varphi_C + 0.375\psi_{CD} = -1.296 \qquad \text{------} \quad (2)$$

力の釣り合い式

$$\Sigma P \cdot C = P_1 \times C_1 + P_2 \times C_2 + P_3 \times C_3$$
$$= 3 \times 2.5 + 2.4 \times 2.5 - 0.427 \times 1.756 = 12.75$$

(注) P_3はO'_3点を中心に反時計回りだから(−)とする。

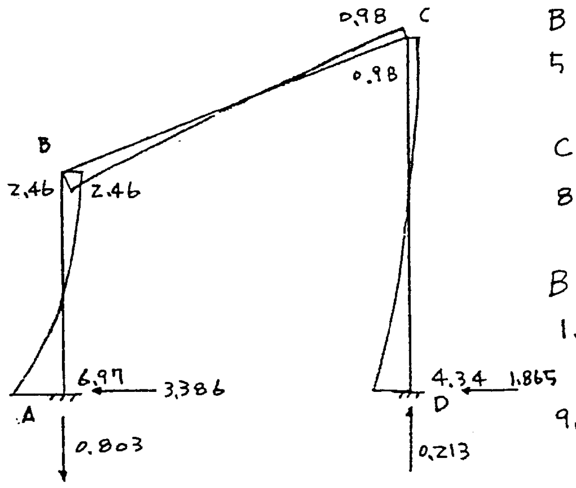
$$(M_{AB} + M_{BA}) \times R_{AB} + (M_{BC} + M_{CB}) \times R_{BC} + (M_{CD} + M_{DC}) = -PC$$
$$(3\varphi_B + 2\psi_{AB}) \times 1 + (1.8\varphi_C + 0.75\psi_{AB}) \times 0.625 = -12.75$$
$$3\varphi_B + 2\psi_{AB} + 1.125\varphi_C + 0.469\psi_{AB} = -12.75$$
$$3\varphi_B + 1.125\varphi_C + 2.469\psi_{AB} = -12.75 \qquad \text{------} \quad (3)$$

	φ_B	φ_C	ψ_{AB}	右辺
$\Sigma M_B=0$	3	0.5	1	−1.554
$\Sigma M_C=0$	0.5	2.2	0.375	−1.296
Case−1	3	1.125	2.469	−12.75

連立に解いて　$\varphi_B = 2.0158$, $\varphi_C = 0.2716$, $\psi_{AB} = -7.7371$

材端モーメント式に代入する

$$M_{AB} = 2.0158 - 7.7371 - 1.25 = -6.97 \ (\mathrm{tm})$$
$$M_{BA} = 2 \times 2.0158 - 7.7371 + 1.25 = -2.46$$
$$M_{BC} = 2.0158 + 0.5 \times 0.2716 + 0.304 = 2.46$$
$$M_{CB} = 0.5 \times 2.0158 + 0.2716 - 0.304 = 0.98$$
$$M_{CD} = 1.2 \times 0.2716 - 0.375 \times 7.7371 + 1.6 = -0.98$$
$$M_{DC} = 0.6 \times 0.2716 - 0.375 \times 7.7371 - 1.6 = -4.34$$



図－7・14 (c)

反力の計算

B点のつり合い (B−A)

$5H_A - 6.97 - 3\times 2.5 = 2.46$

$H_A = 3.386$ t

C点のつり合い (C−D)

$8H_D - 4.34 - 2.4\times 4 = 0.98$

$H_D = 1.865$ t

B点のつり合い (B−C−D)

$1.865\times 5 - 4.34 - 2.4\times 1$

$- 0.427\times 4.277 + 8V_D = 2.46$

$9.325 - 4.34 - 2.4 - 1.826 + 8V_D = 2.46$

$V_D = 0.213$ t (上)

C点のつり合い (C−B−A)

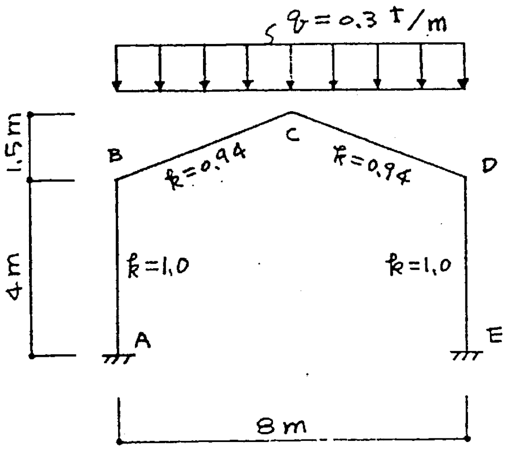
$3.386\times 8 - 6.97 - 8V_A - 3\times 5.5 + 0.427\times 4.277$

$= -0.98$

$27.088 - 6.97 - 8V_A - 16.5 + 1.826 = -0.98$

$V_A = 0.803$ t (下)

(例題 7・6)



図－7・15 (a)

左図の山形ラーメンが等分布荷重を受ける時の曲げモーメント図を求めよ。

(解)

独立変形部材の数

$n = 4 - 2\times 1 = 2$ 個

独立変形部材をA−B材とD−E材にとる。

(Case−1)

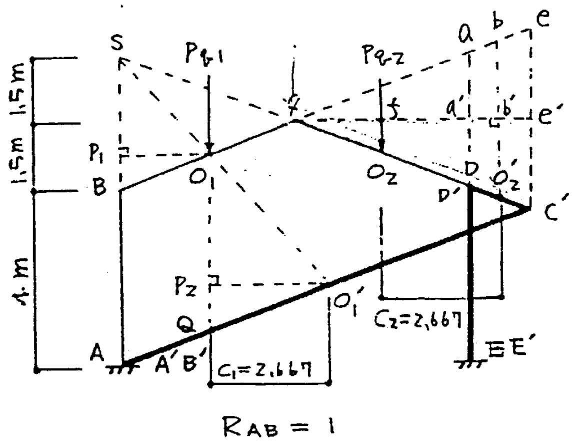
$R_{AB} = 1$ の時の部材角の関係

B−C間の合力

$P_{q1} = 0.3\times 4 = 1.2$ t

C−D間の合力

$P_{q2} = 0.3\times 4 = 1.2$ t



$R_{AB} = 1$

図－7・15 (b)

C_1を求める

$\triangle SBO_1 \infty \triangle O_1QO_1'$　　　$O_1P_1 = 2m$

$SB : O_1P_1 = O_1Q : O_1'P_2$

$3 : 2 = 4 : O_1'P_2$　　　$\therefore O_1'P_2 = 2.667\ m = C_1$

C_2を求める

$Da = 3\ m$　　$c'e = 4\ m$　　$O_2'b' = 3.5/2 = 1.75\ m$

$ca' : Da' = cb' : O_2'b'$

$4 : 1.5 = cb' : 1.75$

$cb' = 4.667\ m$　　$\therefore C_2 = fb' = cb' - cf$

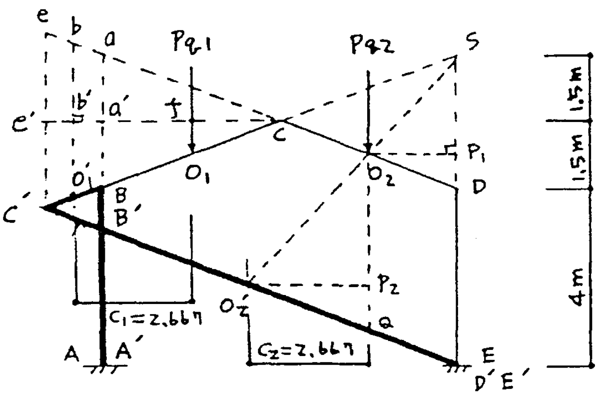
$= 4.667 - 2 = 2.667\ m$

$R_{AB} = 1$　の時

$$\left[\begin{array}{l} R_{BC} = 1 - \dfrac{B'C'}{BC} = 1 - \dfrac{SA}{SB} = 1 - \dfrac{7}{3} = -1.333 \\ R_{CD} = 1 + \dfrac{C'D'}{CD} = \dfrac{CC'}{CD} = \dfrac{ec'}{aD} = \dfrac{4}{3} = 1.333 \\ R_{DE} = 1 - \dfrac{D'E'}{DE} = 0 \end{array}\right.$$

従って部材角の関係は

$\Psi_{BC} = -1.333\ \Psi_{AB}$,　$\Psi_{CD} = 1.333\ \Psi_{AB}$



$R_{DE} = 1$

図－7・15 (c)

(Case－2)

$R_{DE} = 1$　の時の部材角の関係

Case－1の対称であるから計算は略する。

$C_1 = C_2 = 2.667\ m$

$R_{DE} = 1$　の時

$$\left[\begin{array}{l} R_{BC} = 1.333 \\ R_{CD} = -1.333 \\ R_{AB} = 0 \end{array}\right.$$

$\Psi_{BC} = 1.333\ \Psi_{DE}$,　$\Psi_{CD} = -1.333\ \Psi_{DE}$

部材角相互の関係をまとめる。

	Case-1 $R_{AB}=1$	Case-2 $R_{DE}=1$	部材角
A − B	1.0	0	ψ_{AB}
B − C	− 1.333	1.333	$-1.333\psi_{AB}+1.333\psi_{DE}$
C − D	1.333	− 1.333	$1.333\psi_{AB}-1.333\psi_{DE}$
D − E	0	1.0	ψ_{DE}

C, M_0, Q_0 の計算

B − C 部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{BC} = -\dfrac{0.3\times 4^2}{12} = -0.4\ tm = -C_{CB} \\[2ex] M_0 = \dfrac{0.3\times 4^2}{8} = 0.6\ tm \\[2ex] Q_0 = \dfrac{0.3\times 4}{2} = 0.6\ t \end{array}\right.$$

C − D 部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{CD} = -0.4\ tm = -C_{DC} \\[2ex] M_0 = 0.6\ tm \\[2ex] Q_0 = 0.6\ t \end{array}\right.$$

材端モーメント式

$$M_{AB} = 1.0(\varphi_B + \psi_{AB}) = \varphi_B + \psi_{AB}$$

$$M_{BA} = 1.0(2\varphi_B + \psi_{AB}) = 2\varphi_B + \psi_{AB}$$

$$\begin{aligned} M_{BC} &= 0.94(2\varphi_B + \varphi_C - 1.333\psi_{AB} + 1.333\psi_{DE}) - 0.4 \\ &= 1.88\varphi_B + 0.94\varphi_C - 1.253\psi_{AB} + 1.253\psi_{DE} - 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{CB} &= 0.94(2\varphi_C + \varphi_B - 1.333\psi_{AB} + 1.333\psi_{DE}) + 0.4 \\ &= 0.94\varphi_B + 1.88\varphi_C - 1.253\psi_{AB} + 1.253\psi_{DE} + 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{CD} &= 0.94(2\varphi_C + \varphi_D + 1.333\psi_{AB} - 1.333\psi_{DE}) - 0.4 \\ &= 1.88\varphi_C + 0.94\varphi_D + 1.253\psi_{AB} - 1.253\psi_{DE} - 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{DC} &= 0.94(2\varphi_D + \varphi_C + 1.333\psi_{AB} - 1.333\psi_{DE}) + 0.4 \\ &= 0.94\varphi_C + 1.88\varphi_D + 1.253\psi_{AB} - 1.253\psi_{DE} + 0.4 \end{aligned}$$

$$M_{DE} = 1.0(2\varphi_D + \psi_{DE}) = 2\varphi_D + \psi_{DE}$$

$$M_{ED} = 1.0(\varphi_D + \psi_{DE}) = \varphi_D + \psi_{DE}$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0 \qquad M_{BA} + M_{BC} = 0$

$3.88\,\varphi_B + 0.94\,\varphi_C - 0.253\,\psi_{AB} + 1.253\,\psi_{DE} = 0.4 \quad \text{-----} \;(1)$

$\Sigma M_C = 0 \qquad M_{CB} + M_{CD} = 0$

$0.94\,\varphi_B + 3.76\,\varphi_C + 0.94\,\varphi_D = 0 \quad \text{------} \;(2)$

$\Sigma M_D = 0 \qquad M_{DC} + M_{DE} = 0$

$0.94\,\varphi_C + 3.88\,\varphi_D + 1.253\,\psi_{AB} - 0.253\,\psi_{DE} = -0.4 \quad \text{---} \;(3)$

力の釣り合い式

Case－1

$\Sigma PC = P_{q1}\cdot C_1 + P_{q2}\cdot C_2 = -(1.2\times 2.667 + 1.2\times 2.667) = -6.401$

$(M_{AB} + M_{BA})\times 1 + (M_{BC} + M_{CB})\times(-1.333) + (M_{CD} + M_{DC})\times 1.333 - 6.401 = 0$

$3\,\varphi_B + 2\,\psi_{AB} - 1.333\,(2.82\,\varphi_B + 2.82\,\varphi_C - 2.506\,\psi_{AB} + 2.506\,\psi_{DE})$

$+\,1.333\,(2.82\,\varphi_C + 2.82\,\varphi_D + 2.506\,\psi_{AB} - 2.506\,\psi_{DE}) = 6.401$

$-0.759\,\varphi_B + 3.759\,\varphi_D + 8.681\,\psi_{AB} - 6.681\,\psi_{DE} = 6.401 \quad \text{------} \;(4)$

Case－2

$\Sigma PC = P_{q1}\,C_1 + P_{q2}\,C_2 = 1.2\times 2.667 + 1.2\times 2.667 = 6.401$

$(M_{DE} + M_{ED})\times 1 + (M_{BC} + M_{CB})\times 1.333 + (M_{CD} + M_{DC})\times(-1.333) + 6.401 = 0$

$3\,\varphi_D + 2\,\psi_{DE} + 1.333\,(2.82\,\varphi_B + 2.82\,\varphi_C - 2.506\,\psi_{AB} + 2.506\,\psi_{DE})$

$-1.333\,(2.82\,\varphi_C + 2.82\,\varphi_D + 2.506\,\psi_{AB} - 2.506\,\psi_{DE}) = -6.401$

$3.759\,\varphi_B - 0.759\,\varphi_D - 6.681\,\psi_{AB} + 8.681\,\psi_{DE} = -6.401 \quad \text{----} \;(5)$

	φ_B	φ_C	φ_D	ψ_{AB}	ψ_{DE}	右辺
$\Sigma M_B=0$	3.88	0.94		−0.253	1.253	0.4
$\Sigma M_C=0$	0.94	3.76	0.94			0
$\Sigma M_D=0$		0.94	3.88	1.253	−0.253	−0.4
Case−1	−0.759		3.759	8.681	−6.681	6.401
Case−2	3.759		−0.759	−6.681	8.681	−6.401

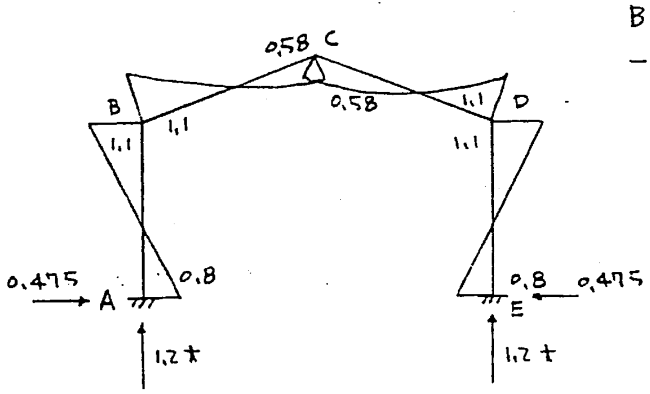
連立に解いて

$\varphi_B = 0.299 \quad \varphi_C = 0 \quad \varphi_D = -0.299 \quad \psi_{AB} = 0.5046$

$\psi_{DE} = -0.5046$

材端モーメント式に代入する。

$M_{AB} = 0.299 + 0.5046 = 0.8 \ (tm)$
$M_{BA} = 2 \times 0.299 + 0.5046 = 1.1$
$M_{BC} = 1.88 \times 0.299 + 0.94 \times 0 - 1.253 \times 0.5046 - 1.253 \times 0.5046 - 0.4 = -1.1$
$M_{CB} = 0.94 \times 0.299 + 1.88 \times 0 - 1.253 \times 0.5046 - 1.253 \times 0.5046 + 0.4 = -0.58$
$M_{CD} = 1.88 \times 0 - 0.94 \times 0.299 + 1.253 \times 0.5046 + 1.253 \times 0.5046 - 0.4 = 0.58$
$M_{DC} = 0.94 \times 0 - 1.88 \times 0.299 + 1.253 \times 0.5046 + 1.253 \times 0.5046 + 0.4 = 1.1$
$M_{DE} = -2 \times 0.299 - 0.5046 = -1.1$
$M_{ED} = -0.299 - 0.5046 = -0.8$



図－7・15 (d)

反力の計算

B点のつり合い (B−A)

$-4H_A + 0.8 = -1.1$

$H_A = 0.475 t$ (右)

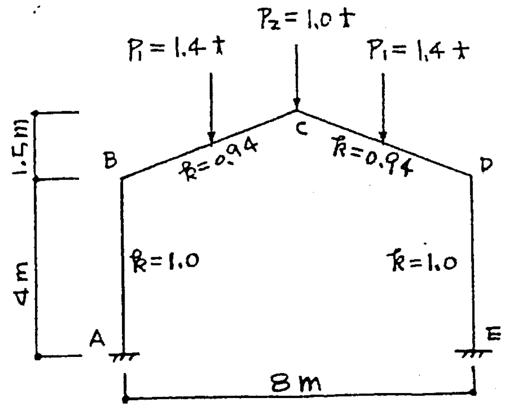
$H_E = 0.475 t$ (左)

C点のつり合い (C−B−A)

$-0.475 \times 5.5 + 4V_A + 0.8 - 1.2 \times 2 = 0.58$

$V_A = 1.2 t$ (上)

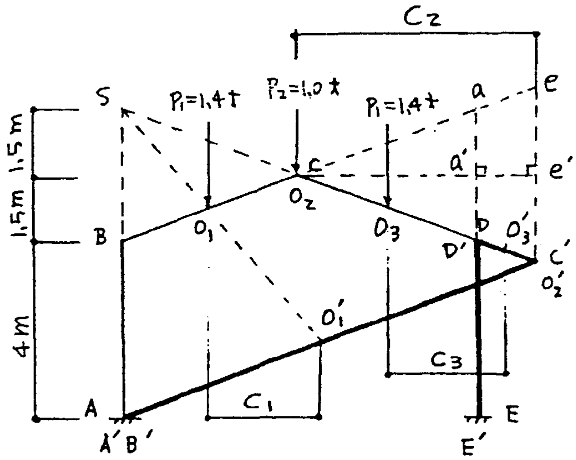
(例題 7・7)



図－7・16 (a)

左図の山形ラーメンが3点集中荷重を受ける時の曲げモーメント図を求めよ。

(解) ラーメンは前問と同じであるから，独立変形部材も同じ様にA－D部材とD－E部材とする。



$R_{AB} = 1$

図－7・16 (b)

(Case－1)　$R_{AB} = 1$ の時の部材角の関係

C の計算

$C_1 = C_3 = 2{,}667$ m （前問参照）

C_2 を求める。

$C_2 = ce'$

$ce' : c'e' = ca' : Da'$

$ce' : 2 = 4 : 1.5$

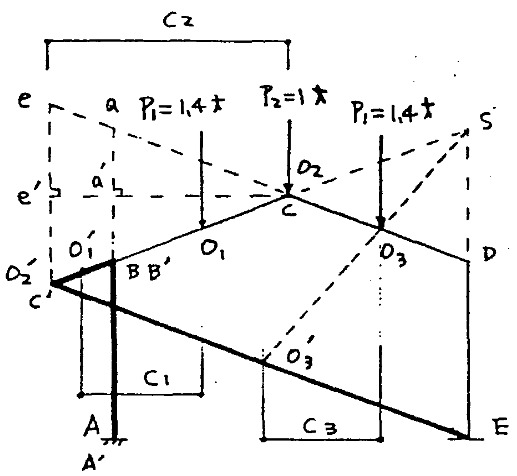
$ce' = 5{,}333$ m $= C_2$

$R_{AB} = 1$ の時

$R_{BC} = -1{,}333$

$R_{CD} = 1{,}333$

$R_{DE} = 0$



$R_{DE} = 1$

図－7・16 (C)

(Case－2)

$R_{DE} = 1$　の時の部材角の関係

$C_1 = C_3 = 2{,}667$ m

$C_3 = 5{,}333$ m

$R_{DE} = 1$　の時

$R_{BC} = 1{,}333$

$R_{CD} = -1{,}333$

$R_{AB} = 0$

部材角相互の関係をまとめる。

	Case-1 $R_{AB}=1$	Case-2 $R_{DE}=1$	部材角
A − B	1.0	0	ψ_{AB}
B − C	−1.333	1.333	$-1.333\psi_{AB}+1.333\psi_{DE}$
C − D	1.333	−1.333	$1.333\psi_{AB}-1.333\psi_{DE}$
D − E	0	1.0	ψ_{DE}

C, M_0, Q_0 の計算

B − C 部材

$$\begin{cases} C_{BC} = -\dfrac{1.4\times4}{8} = -0.7\,tm = -C_{CB} \\ M_0 = \dfrac{1.4\times4}{4} = 1.4\,tm \\ Q_0 = \dfrac{1.4}{2} = 0.7\,t \end{cases}$$

C − D 部材

$$\begin{cases} C_{CD} = -0.7\,tm = -C_{DC} \\ M_0 = 1.4\,tm \\ Q_0 = 0.7\,t \end{cases}$$

材端モーメント式

$$M_{AB} = \varphi_B + \psi_{AB}$$
$$M_{BA} = 2\varphi_B + \psi_{AB}$$
$$M_{BC} = 1.88\varphi_B + 0.94\varphi_C - 1.253\psi_{AB} + 1.253\psi_{DE} - 0.7$$
$$M_{CB} = 0.94\varphi_B + 1.88\varphi_C - 1.253\psi_{AB} + 1.253\psi_{DE} + 0.7$$
$$M_{CD} = 1.88\varphi_C + 0.94\varphi_D + 1.253\psi_{AB} - 1.253\psi_{DE} - 0.7$$
$$M_{DC} = 0.94\varphi_C + 1.88\varphi_D + 1.253\psi_{AB} - 1.253\psi_{DE} + 0.7$$
$$M_{DE} = 2\varphi_D + \psi_{DE}$$
$$M_{ED} = \varphi_D + \psi_{DE}$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0 \qquad M_{BA} + M_{BC} = 0$

$$3.88\varphi_B + 0.94\varphi_C - 0.253\psi_{AB} + 1.253\psi_{DE} = 0.7 \quad \text{------} \quad (1)$$

$\Sigma M_C = 0 \qquad M_{CB} + M_{CD} = 0$

$$0.94\varphi_B + 3.76\varphi_C + 0.94\varphi_D = 0 \qquad \text{------ (2)}$$

$\Sigma M_D = 0 \qquad M_{DC} + M_{DE} = 0$

$$0.94\varphi_C + 3.88\varphi_D + 1.253\psi_{AB} - 0.253\psi_{DE} = -0.7 \qquad \text{------ (3)}$$

力の釣り合い式

Case－1

$$\Sigma PC = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 + P_1 \cdot C_3$$
$$= -(1.4 \times 2.667 + 1.0 \times 5.333 + 1.4 \times 2.667) = -12.801$$

$$(M_{AB} + M_{BA}) \times 1 + (M_{BC} + M_{CB}) \times (-1.333) + (M_{CD} + M_{DC}) \times 1.333 - 12.801 = 0$$
$$-0.759\varphi_B + 3.759\varphi_D + 8.681\psi_{AB} - 6.681\psi_{DE} = 12.801 \text{ ----- (4)}$$

Case－2

$$\Sigma PC = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 + P_1 \cdot C_3$$
$$= 1.4 \times 2.667 + 1.0 \times 5.333 + 1.4 \times 2.667 = 12.801$$

$$(M_{BC} + M_{CB}) \times 1.333 + (M_{CD} + M_{DC}) \times (-1.333) + (M_{DE} + M_{ED}) \times 1 + 12.801 = 0$$
$$3.759\varphi_B - 0.759\varphi_D - 6.681\psi_{AB} + 8.681\psi_{DE} = -12.801 \qquad \text{------- (5)}$$

	φ_B	φ_C	φ_D	ψ_{AB}	ψ_{DE}	右辺
$\Sigma M_B=0$	3.88	0.94		-0.253	1.253	0.7
$\Sigma M_C=0$	0.94	3.76	0.94			0
$\Sigma M_D=0$		0.94	3.88	1.253	-0.253	-0.7
Case-1	-0.759		3.759	8.681	-6.681	12.801
Case-2	3.759		-0.759	-6.681	8.681	-12.801

連立に解いて

$\varphi_B = 0.5688$, $\varphi_C = 0$, $\varphi_D = -0.5688$, $\psi_{AB} = 1.001$, $\psi_{DE} = -1.001$

材端モーメント式に代入する。

$M_{AB} = 0.5688 + 1.001 = 1.57$ (t m)

$M_{BA} = 2 \times 0.5688 + 1.001 = 2.14$

$M_{BC} = 1.88 \times 0.5688 + 0.94 \times 0 - 1.253 \times 1.001 - 1.253 \times 1.001 - 0.7 = -2.14$

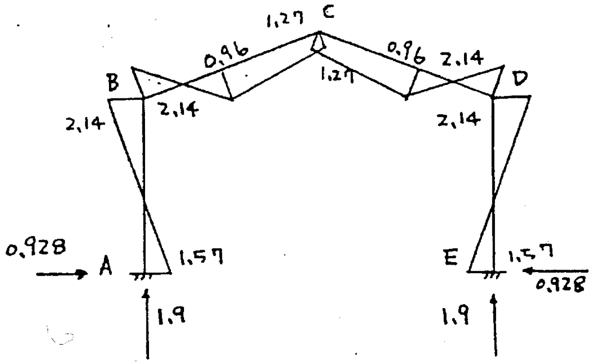
$M_{CB} = 0.94 \times 0.5688 + 1.88 \times 0 - 1.253 \times 1.001 - 1.253 \times 1.001 + 0.7 = -1.27$

$M_{CD} = 1.88 \times 0 - 0.94 \times 0.5688 + 1.253 \times 1.001 + 1.253 \times 1.001 - 0.7 = 1.27$

$M_{DC} = 0.94 \times 0 - 1.88 \times 0.5688 + 1.253 \times 1.001 + 1.253 \times 1.001 + 0.7 = 2.14$

$M_{DE} = -2 \times 0.5688 - 1.001 = -2.14$

$M_{ED} = -0.5688 - 1.001 = -1.57$



M − D

図－7・16 (d)

反力の計算

B点のつり合い (B−A)

$-4 \times H_A + 1.57 = -2.14$

$H_A = 0.928$ t (右)

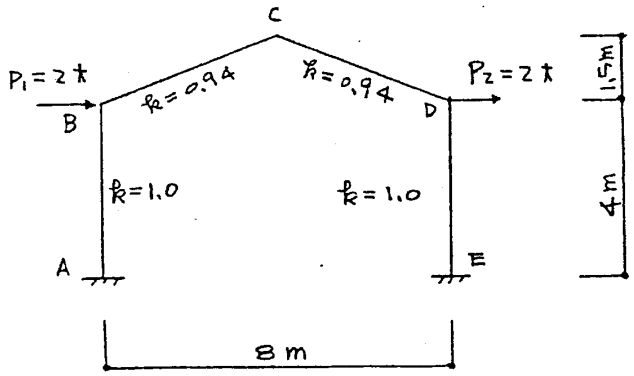
$H_E = 0.928$ t (左

C点のつり合い (C−B−A)

$-5.5 \times 0.928 + 1.57 + 4V_A - 1.4 \times 2 = 1.27$

$V_A = 1.9$ (t)

(例題 7・8)



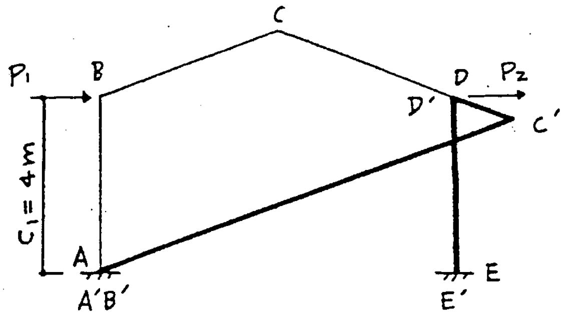
図－7・17 (a)

左図の山形ラーメンが水平荷重を受ける時の曲げモーメント図を求めよ。

(解)

前問と同じラーメンである。

独立変形部材を同様にA−B，D−E部材とする。



$R_{AB}=1$

図－7.17 (b)

(Case－1)　$R_{AB}=1$の時の部材角の関係

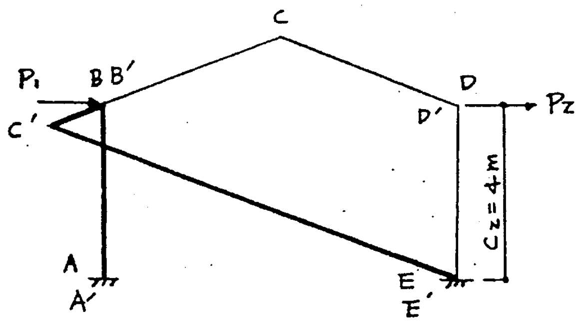
$C_1=4m$

$R_{AB}=1$　の時

$R_{BC}=-1.333$

$R_{CD}=1.333$

$R_{DE}=0$



$R_{DE}=1$

図－7.17 (C)

(Case－2)　$R_{DE}=1$の時の部材角の関係

$C_2=4m$

$R_{DE}=1$　の時

$R_{BC}=1.333$

$R_{CD}=-1.333$

$R_{AB}=0$

部材角相互の関係

	Case-1 $R_{AB}=1$	Case-2 $R_{DE}=1$	部　材　角
A－B	1.0	0	Ψ_{AB}
B－C	-1.333	1.333	$-1.333\Psi_{AB}+1.333\Psi_{DE}$
C－D	1.333	-1.333	$1.333\Psi_{AB}-1.333\Psi_{DE}$
D－E	0	1.0	Ψ_{DE}

部材の中間に荷重がないので荷重項(C)はない。

材端モーメント式

$$M_{AB} = \varphi_B + \psi_{AB}$$
$$M_{BA} = 2\varphi_B + \psi_{AB}$$
$$M_{BC} = 1.88\varphi_B + 0.94\varphi_C - 1.253\psi_{AB} + 1.253\psi_{DE}$$
$$M_{CB} = 0.94\varphi_B + 1.88\varphi_C - 1.253\psi_{AB} + 1.253\psi_{DE}$$
$$M_{CD} = 1.88\varphi_C + 0.94\varphi_D + 1.253\psi_{AB} - 1.253\psi_{DE}$$
$$M_{DC} = 0.94\varphi_C + 1.88\varphi_D + 1.253\psi_{AB} - 1.253\psi_{DE}$$
$$M_{DE} = 2\varphi_D + \psi_{DE}$$
$$M_{ED} = \varphi_D + \psi_{DE}$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0 \qquad M_{BA} + M_{BC} = 0$

$3.88\varphi_B + 0.94\varphi_C - 0.253\psi_{AB} + 1.253\psi_{DE} = 0$ ------ (1)

$\Sigma M_C = 0 \qquad M_{CB} + M_{CD} = 0$

$0.94\varphi_B + 3.76\varphi_C + 0.94\varphi_D = 0$ ------ (2)

$\Sigma M_D = 0 \qquad M_{DC} + M_{DE} = 0$

$0.94\varphi_C + 3.88\varphi_D + 1.253\psi_{AB} - 0.253\psi_{DE} = 0$ ------ (3)

力の釣り合い式

Case－1

$\Sigma PC = P_1 \cdot C_1 = 2 \times 4 = 8$

$(M_{AB} + M_{BA}) \times 1 + (M_{BC} + M_{CB}) \times (-1.333) + (M_{CD} + M_{DC}) \times 1.333 + 8 = 0$

$-0.759\varphi_B + 3.759\varphi_D + 8.681\psi_{AB} - 6.681\psi_{DE} = -8$ ------ (4)

Case－2

$\Sigma P \cdot C = P_2 \cdot C_2 = 2 \times 4 = 8$

$(M_{BC} + M_{CB}) \times 1.333 + (M_{CD} + M_{DC}) \times (-1.333) + (M_{DE} + M_{ED}) \times 1 + 8 = 0$

$3.759\varphi_B - 0.759\varphi_D - 6.681\psi_{AB} + 8.681\psi_{DE} = -8$ ------ (5)

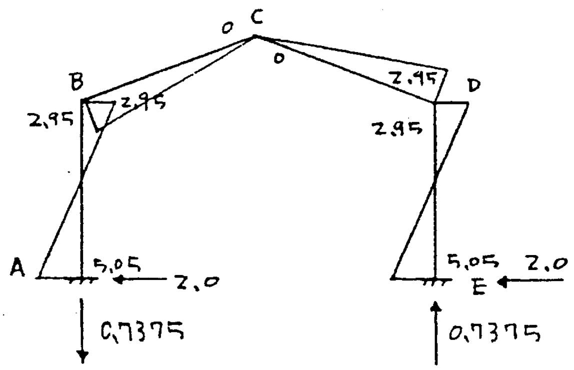
	φ_B	φ_C	φ_D	Ψ_{AB}	Ψ_{DE}	右辺
$\Sigma M_B=0$	3.88	0.94		−0.253	1.253	0
$\Sigma M_C=0$	0.94	3.76	0.94			0
$\Sigma M_D=0$		0.94	3.88	1.253	−0.253	0
Case-1	−0.759		3.759	8.681	−6.681	−8
Case-2	3.759		−0.759	−6.681	8.681	−8

連立に解いて

$\varphi_B = 2.094$, $\varphi_C = -1.047$, $\varphi_D = 2.094$, $\Psi_{AB} = -7.141$, $\Psi_{DE} = -7.141$

材端モーメント式に代入する。

$M_{AB} = 2.094 - 7.141 = -5.05$ (tm)
$M_{BA} = 2 \times 2.094 - 7.141 = -2.95$
$M_{BC} = 1.88 \times 2.094 - 0.94 \times 1.047 + 1.253 \times 7.141 - 1.253 \times 7.141 = 2.95$
$M_{CB} = 0.94 \times 2.094 - 1.88 \times 1.047 + 1.253 \times 7.141 - 1.253 \times 7.141 = 0$
$M_{CD} = -1.88 \times 1.047 + 0.94 \times 2.094 - 1.253 \times 7.141 + 1.253 \times 7.141 = 0$
$M_{DC} = -0.94 \times 1.047 + 1.88 \times 2.094 - 1.253 \times 7.141 + 1.253 \times 7.141 = 2.95$
$M_{DE} = 2 \times 2.094 - 7.141 = -2.95$
$M_{ED} = 2.094 - 7.141 = -5.05$



M − D
図−7.17(d)

反力の計算

B点のつり合い (B−A)

$4H_A - 5.05 = 2.95$
$H_A = 2.0$ t (左)

$\Sigma X = 0$ より

$4 - 2 - H_A = 0$
$H_A = 2$ t (左)

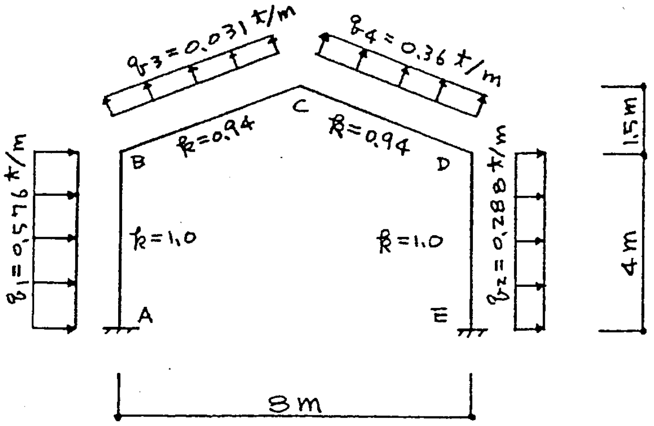
C点のつり合い

$2 \times 5.5 - 5.05 - 4V_A - 2 \times 1.5 = 0$
$V_A = 0.7375$ t (下)

$\Sigma Y = 0$ より

$V_E = 0.7375$ t (下)

(例題 7・9)

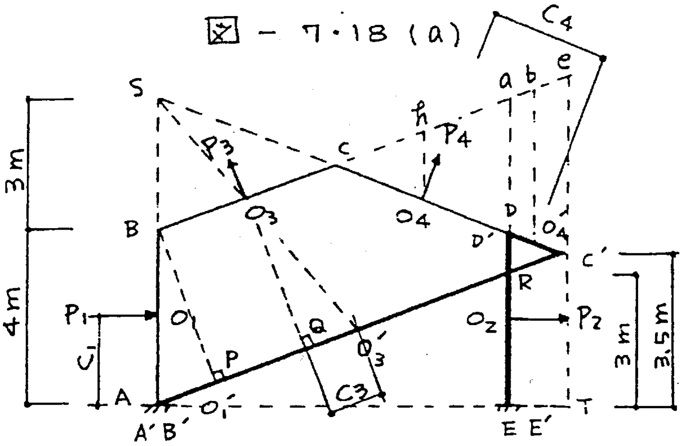


図－7・18 (a)

左図の山形ラーメンが風荷重を受けた時の曲げモーメント図を求めよ。

(解)

前例題と同じラーメンだから部材角の関係は前と同じであるから、$C_1 \sim C_4$ だけを求める。



$R_{AB} = 1$

図－7・18 (b)

(Case－1) $R_{AB}=1$ の時

$C_1 = 2$ m　　$C_2 = 0$

C_3を求める

$C_3 = QO_3' = AC' - AP - PQ - \frac{1}{2}AC'$

△SAC'は二等辺三角形であるから　TC' = 3.5m

△ARE ∽ △AC'T　　$AR = \sqrt{3^2+8^2} = 8.544$ m

AR : AC' = RE : C'T

8.544 : AC' = 3 : 3.5

AC' = 9.968 m

△ABP ∽ △ARE　であるから

AB : AP = AR : RE

4 : AP = 8.544 : 3

A = 1.404 m

BC = 4.272 m　であるから　$PQ = BO_3 = \frac{1}{2}BC = 2.136$ m

$\therefore\ C_3 = AC' - AP - PQ - \frac{1}{2}AC' = 9.968 - 1.404 - 2.136 - \frac{1}{2}9.968$

$= 1.444$ m

C_4 を求める。

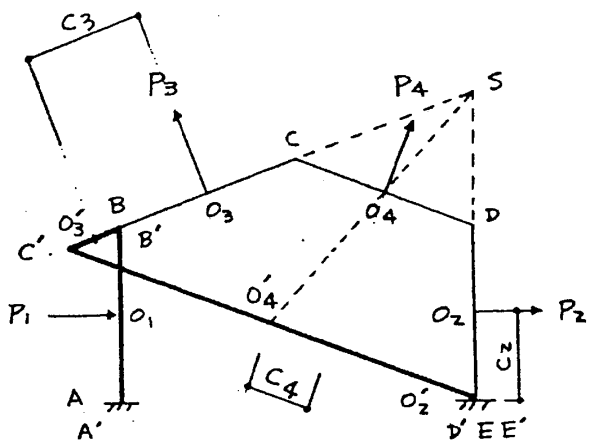
$ec' = 4.0\,m \qquad aD = 3.0\,m$

従って　$bO_4' = 3.5\,m \qquad$ 角$O_4' = 1.5\,m$

$cD = 4.272\,m$ であるから cO_4' は

$$cD : aD = cO_4' : bO_4'$$
$$4.272 : 3 = cO_4' : 3.5$$
$$cO_4' = 4.984\,m$$

$$\therefore\ C_4 = O_4O_4' = cO_4' - cO_4 = 4.984 - \frac{1}{2} \times 4.272 = 2.848\,m$$



$R_{DE} = 1$

図 － 7・18 (c)

(Case－2)　$R_{DE}=1$ の時

Case－1 と同様であるから

$C_1 = 0$

$C_2 = 2\,m$

$C_3 = 2.848\,m$

$C_4 = 1.444\,m$

部材角の関係は前例題に準ずるから

	Case－1 $R_{AB}=1$	Case－2 $R_{DE}=1$	部材角
A－B	1.0	0	ψ_{AB}
B－C	－1.333	1.333	$-1.333\psi_{AB}+1.333\psi_{DE}$
C－D	1.333	－1.333	$1.333\psi_{AB}-1.333\psi_{DE}$
D－E	0	1.0	ψ_{DE}

C, M_0, Q_0 の計算

A − B 部材

$$
\left[\begin{array}{l}
C_{AB} = -\dfrac{0.576 \times 4^2}{12} = -0.768\ \mathrm{tm} = -C_{BA} \\
M_0 = \dfrac{0.576 \times 4^2}{8} = 1.152\ \mathrm{tm} \\
Q_0 = \dfrac{0.576 \times 4}{2} = 1.152\ \mathrm{t}
\end{array}\right.
$$

B − C 部材

$$
\left[\begin{array}{l}
C_{BC} = \dfrac{0.031 \times 4.272^2}{12} = 0.047\ \mathrm{tm} = -C_{CB} \\
M_0 = \dfrac{0.031 \times 4.272^2}{8} = 0.071\ \mathrm{tm} \\
Q_0 = \dfrac{0.031 \times 4.272}{2} = 0.066\ \mathrm{t}
\end{array}\right.
$$

C − D 部材

$$
\left[\begin{array}{l}
C_{CD} = \dfrac{0.36 \times 4.272^2}{12} = 0.547\ \mathrm{tm} = -C_{DC} \\
M_0 = \dfrac{0.36 \times 4.272^2}{8} = 0.821\ \mathrm{tm} \\
Q_0 = \dfrac{0.36 \times 4.272}{2} = 0.769\ \mathrm{t}
\end{array}\right.
$$

D − E 部材

$$
\left[\begin{array}{l}
C_{DE} = \dfrac{0.288 \times 4^2}{12} = 0.384\ \mathrm{tm} = -C_{ED} \\
M_0 = \dfrac{0.288 \times 4^2}{8} = 0.576\ \mathrm{tm} \\
Q_0 = \dfrac{0.288 \times 4}{2} = 0.576\ \mathrm{t}
\end{array}\right.
$$

材端モーメント式

$$
\begin{aligned}
M_{AB} &= \varphi_B + \psi_{AB} - 0.768 \\
M_{BA} &= 2\varphi_B + \psi_{AB} + 0.768 \\
M_{BC} &= 1.88\varphi_B + 0.94\varphi_C - 1.253\psi_{AB} + 1.253\psi_{DE} + 0.047 \\
M_{CB} &= 0.94\varphi_B + 1.88\varphi_C - 1.253\psi_{AB} + 1.253\psi_{DE} - 0.047 \\
M_{CD} &= 1.88\varphi_C + 0.94\varphi_D + 1.253\psi_{AB} - 1.253\psi_{DE} + 0.547 \\
M_{DC} &= 0.94\varphi_C + 1.88\varphi_D + 1.253\psi_{AB} - 1.253\psi_{DE} - 0.547 \\
M_{DE} &= 2\varphi_D + \psi_{DE} + 0.384 \\
M_{ED} &= \varphi_D + \psi_{DE} - 0.384
\end{aligned}
$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0$ $\qquad M_{BA} + M_{BC} = 0$

$$3.88\varphi_B + 0.94\varphi_C - 0.253\psi_{AB} + 1.253\psi_{DE} = -0.815 \quad \text{------ (1)}$$

$\Sigma M_C = 0 \qquad M_{CB} + M_{CD} = 0$

$$0.94\varphi_B + 3.76\varphi_C + 0.94\varphi_D = -0.5 \quad \text{------ (2)}$$

$\Sigma M_D = 0 \qquad M_{DC} + M_{DE} = 0$

$$0.94\varphi_C + 3.88\varphi_D + 1.253\Psi_{AB} - 0.253\Psi_{DE} = 0.163 \quad \text{------- (3)}$$

力のつり合い式

$P_1 \sim P_4$を計算しておく

$P_1 = 0.576 \times 4 = 2.304\ t$
$P_2 = 0.288 \times 4 = 1.152\ t$
$P_3 = 0.031 \times 4.272 = 0.132\ t$
$P_4 = 0.36 \times 4.272 = 1.538\ t$

Case－1

$$\Sigma P\cdot C = P_1\cdot C_1 + P_3\cdot C_3 + P_4\cdot C_4 = 2.304 \times 2 + 0.132 \times 1.444 + 1.538 \times 2.848$$
$$= 9.179$$

$$(M_{AB} + M_{BA}) \times 1 + (M_{BC} + M_{CB}) \times (-1.333) + (M_{CD} + M_{DC}) \times 1.333 + 9.179 = 0$$
$$-0.759\varphi_B + 3.759\varphi_D + 8.681\Psi_{AB} - 6.681\Psi_{DE} = 9.179 \quad \text{------ (4)}$$

Case－2

$$\Sigma P\cdot C = P_2\cdot C_2 + P_3\cdot C_3 + P_4\cdot C_4$$
$$= 1.152 \times 2 - 0.132 \times 2.848 - 1.538 \times 1.444 = -0.293$$

$$(M_{BC} + M_{CB}) \times 1.333 + (M_{CD} + M_{DC}) \times (-1.333) + (M_{DE} + M_{ED}) \times 1 - 0.293 = 0$$
$$3.759\varphi_B - 0.759\varphi_D - 6.681\Psi_{AB} + 8.681\Psi_{DE} = 0.293 \quad \text{------ (5)}$$

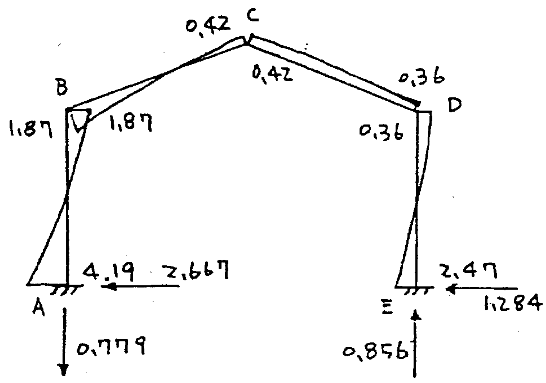
	φ_B	φ_C	φ_D	Ψ_{AB}	Ψ_{DE}	右辺
$\Sigma M_B=0$	3.88	0.94		−0.253	1.253	−0.815
$\Sigma M_C=0$	0.94	3.76	0.94			−0.5
$\Sigma M_D=0$		0.94	3.88	1.253	−0.253	0.163
Case−1	−0.759		3.759	8.681	−6.681	−9.179
Case−2	3.759		−0.759	−6.681	8.681	0.293

連立に解いて

$\varphi_B = 0.781$, $\varphi_C = -0.662$, $\varphi_D = 1.335$, $\psi_{AB} = -4.198$, $\psi_{DE} = -3.418$

材端モーメント式に代入して

$M_{AB} = 0.781 - 4.198 - 0.768 = -4.19$ (t·m)
$M_{BA} = 2 \times 0.781 - 4.198 + 0.768 = -1.87$
$M_{BC} = 1.88 \times 0.781 - 0.94 \times 0.662 + 1.253 \times 4.198 - 1.253 \times 3.418 + 0.047 = 1.87$
$M_{CB} = 0.94 \times 0.781 - 1.88 \times 0.662 + 1.253 \times 4.198 - 1.253 \times 3.418 - 0.047 = 0.42$
$M_{CD} = -1.88 \times 0.662 + 0.94 \times 1.335 - 1.253 \times 4.198 + 1.253 \times 3.418 + 0.547 = -0.42$
$M_{DC} = -0.94 \times 0.662 + 1.88 \times 1.335 - 1.253 \times 4.198 + 1.253 \times 3.418 - 0.547 = 0.36$
$M_{DE} = 2 \times 1.335 - 3.418 + 0.384 = -0.36$
$M_{ED} = 1.335 - 3.418 - 0.384 = -2.47$



M − D
図 − 7・18 (d)

反力の計算

B 点のつり合い (B−A)

$4H_A - 4.19 - 2.304 \times 2 = 1.87$

$H_A = 2.667$ t (左)

D 点のつり合い (D−E)

$4H_E - 2.47 - 1.152 \times 2 = 0.36$

$H_E = 1.284$ t (左)

C 点のつり合い (C−B−A)

$5.5 \times 2.667 - 4.19 - 4V_A - 2.304 \times 3.5 + 0.132 \times 2.136 = -0.42$

$14.669 - 4.19 - 4V_A - 8.064 + 0.282 = -0.42$

$V_A = 0.779$ t (下)

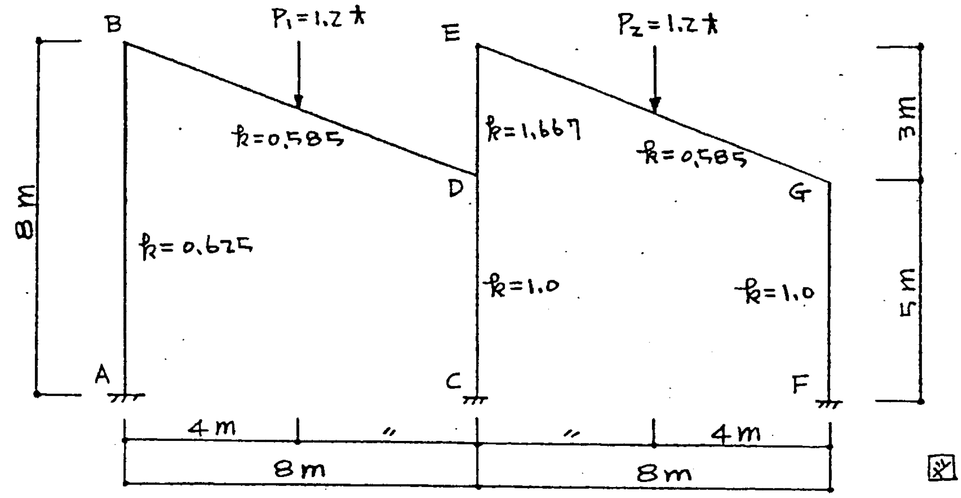
C 点のつり合い (C−D−E)

$5.5 \times 1.284 - 2.47 + 4V_E - 1.152 \times 3.5 + 1.538 \times 2.136 = 0.42$

$7.062 - 2.47 - 4V_E - 4.032 + 3.285 = 0.42$

$V_E = 0.856$ t (上)

（例題 7・10） 図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

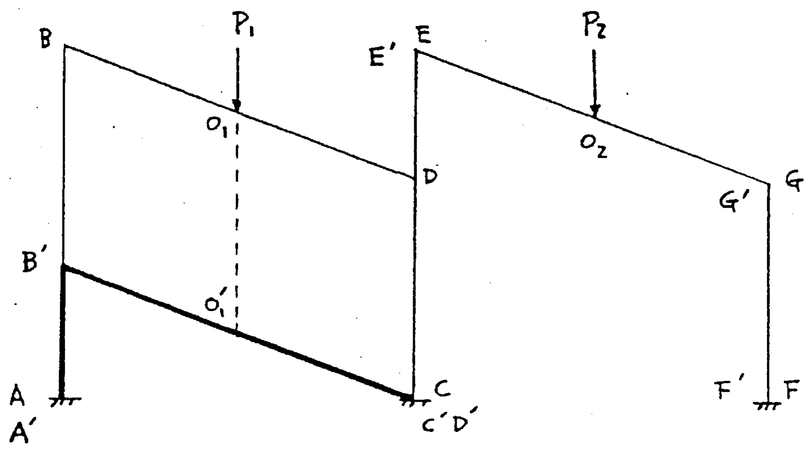


図－7・19 (a)

（解） 独立変形部材の数

$n = 6 - 2 \times 2 = 2$ 個　　C－D部材とF－G部材を独立変形部材とする。

（Case－1） $R_{CD} = 1$ の時の部材角の関係



$R_{CD} = 1$

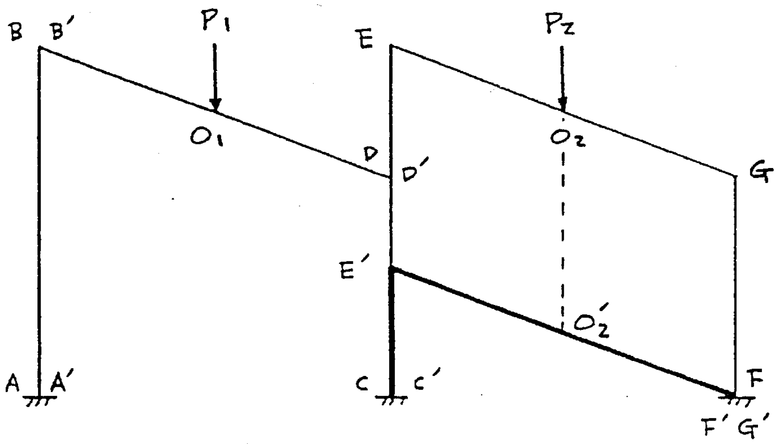
図－7・19 (b)

$C_1 = C_2 = 0$

$R_{CD} = 1$ の時

$$
\left[
\begin{array}{l}
R_{AB} = 1 - \dfrac{A'B'}{AB} = 1 - \dfrac{3}{8} = 0.625 \\
R_{DE} = 1 - \dfrac{D'E'}{DE} = 1 - \dfrac{8}{3} = -1.667 \\
R_{BD} = R_{EG} = R_{FG} = 0
\end{array}
\right.
$$

（Case－2）　$R_{FG}=1$ の時の部材角の関係



$R_{FG}=1$

図－7・19（c）

$C_1 = C_2 = 0$

$R_{FG}=1$ の時

$$\left[\begin{array}{l} R_{DE} = 1 + \dfrac{D'E'}{DE} = 1 + \dfrac{2}{3} = 1.667 \\ R_{EG} = R_{CD} = R_{BD} = R_{AB} = 0 \end{array}\right.$$

部材角相互の関係

	Case－1 $R_{CD}=1$	Case－2 $R_{FG}=1$	部　材　角
A－B	0.625	0	$0.625\,\psi_{CD}$
B－D	0	0	0
C－D	1.0	0	ψ_{CD}
D－E	−1.667	1.667	$-1.667\,\psi_{CD}+1.667\,\psi_{FG}$
E－G	0	0	0
F－G	0	1.0	ψ_{FG}

C, M_0, Q_0 の計算

$$\left[\begin{array}{l} C_{BD} = C_{EG} = -C_{DB} = -C_{GE} = -\dfrac{1.2\times 8}{8} = -1.2\,tm \\ M_0 = \dfrac{1.2\times 8}{4} = 2.4\,tm \\ Q_0 = \dfrac{1.2}{2} = 0.6\,t \end{array}\right.$$

材端モーメント式

$$M_{AB} = 0.625\,(\varphi_B + 0.625\,\psi_{CD}) = 0.625\,\varphi_B + 0.391\,\psi_{CD}$$
$$M_{BA} = 0.625\,(2\varphi_B + 0.625\,\psi_{CD}) = 1.25\,\varphi_B + 0.391\,\psi_{CD}$$
$$M_{BD} = 0.585\,(2\varphi_B + \varphi_D) - 1.2 = 1.17\,\varphi_B + 0.585\,\varphi_D - 1.2$$
$$M_{CD} = 1.0\,(\varphi_D + \psi_{CD}) = \varphi_D + \psi_{CD}$$
$$M_{DC} = 1.0\,(2\varphi_D + \psi_{CD}) = 2\varphi_D + \psi_{CD}$$
$$M_{DB} = 0.585\,(2\varphi_D + \varphi_B) + 1.2 = 1.17\,\varphi_D + 0.585\,\varphi_B + 1.2$$
$$M_{DE} = 1.667\,(2\varphi_D + \varphi_E - 1.667\,\psi_{CD} + 1.667\,\psi_{FG})$$
$$= 3.334\,\varphi_D + 1.667\,\varphi_E - 2.779\,\psi_{CD} + 2.779\,\psi_{FG}$$
$$M_{ED} = 1.667\,(2\varphi_E + \varphi_D - 1.667\,\psi_{CD} + 1.667\,\psi_{FG})$$
$$= 1.667\,\varphi_D + 3.334\,\varphi_E - 2.779\,\psi_{CD} + 2.779\,\psi_{FG}$$
$$M_{EG} = 0.585\,(2\varphi_E + \varphi_G) - 1.2 = 1.17\,\varphi_E + 0.585\,\varphi_G - 1.2$$
$$M_{FG} = 1.0\,(\varphi_G + \psi_{FG}) = \varphi_G + \psi_{FG}$$
$$M_{GF} = 1.0\,(2\varphi_G + \psi_{FG}) = 2\varphi_G + \psi_{FG}$$
$$M_{GE} = 0.585\,(2\varphi_G + \varphi_E) + 1.2 = 0.585\,\varphi_E + 1.17\,\varphi_G + 1.2$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0 \qquad M_{BA} + M_{BD} = 0$

$$2.42\,\varphi_B + 0.585\,\varphi_D + 0.391\,\psi_{CD} = 1.2 \quad \text{-------} \quad (1)$$

$\Sigma M_D = 0 \qquad M_{DC} + M_{DB} + M_{DE} = 0$

$$0.585\,\varphi_B + 6.504\,\varphi_D + 1.667\,\varphi_E - 1.779\,\psi_{CD} + 2.779\,\psi_{FG} = -1.2 \quad \text{---} \quad (2)$$

$\Sigma M_E = 0 \qquad M_{ED} + M_{EG} = 0$

$$1.667\,\varphi_D + 4.504\,\varphi_E + 0.585\,\varphi_G - 2.779\,\psi_{CD} + 2.779\,\psi_{FG} = 1.2 \quad \text{----} \quad (3)$$

$\Sigma M_G = 0 \qquad M_{GF} + M_{GE} = 0$

$$0.585\,\varphi_E + 3.17\,\varphi_G + \psi_{FG} = -1.2 \quad \text{------} \quad (4)$$

力のつり合い式

Case－1

$$\Sigma P\cdot C = 0$$

$$(M_{AB}+M_{BA})\times 0.625 + (M_{CD}+M_{DC})\times 1.0 + (M_{DE}+M_{ED})\times(-1.667) = 0$$

$$1.172\,\varphi_B - 5.337\,\varphi_D - 8.337\,\varphi_E + 11.754\,\psi_{CD} - 9.265\,\psi_{FG} = 0 \quad \text{---} \quad (5)$$

Case－2

$$\Sigma P\cdot C = 0$$

$$(M_{DE}+M_{ED})\times 1.667 + (M_{FG}+M_{GF})\times 1 = 0$$

$$8.337\,\varphi_D + 8.337\,\varphi_E + 3\,\varphi_G - 9.265\,\psi_{CD} + 11.265\,\psi_{FG} = 0 \quad \text{---} (6)$$

	φ_B	φ_D	φ_E	φ_G	ψ_{CD}	ψ_{FG}	右辺
$\Sigma M_B=0$	2.42	0.585			0.391		1.2
$\Sigma M_D=0$	0.585	6.504	1.667		−1.779	2.779	−1.2
$\Sigma M_E=0$		1.667	4.504	0.585	−2.779	2.779	1.2
$\Sigma M_G=0$			0.585	3.17		1.0	−1.2
Case－1	1.172	−5.337	−8.337		11.754	−9.265	0
Case－2		8.337	8.337	3	−9.265	11.265	0

連立に解いて

$\varphi_B = 0.512$, $\varphi_D = -0.477$. $\varphi_E = 0.495$, $\varphi_G = -0.683$

$\psi_{CD} = 0.615$, $\psi_{FG} = 0.675$

材端モーメント式に代入する

$M_{AB} = 0.625\times 0.512 + 0.391\times 0.615 = 0.56$ (tm)

$M_{BA} = 1.25\times 0.512 + 0.391\times 0.615 = 0.88$

$M_{BD} = 1.17\times 0.512 - 0.585\times 0.477 - 1.2 = -0.88$

$M_{CD} = -0.477 + 0.615 = 0.4$

$M_{DC} = -2\times 0.477 + 0.615 = -0.34$

$M_{DB} = 0.585\times 0.512 - 1.17\times 0.477 + 1.2 = 0.94$

$M_{DE} = -3.334 \times 0.477 + 1.667 \times 0.495 - 2.779 \times 0.615 + 2.779 \times 0.675$
$\quad = -0.6$

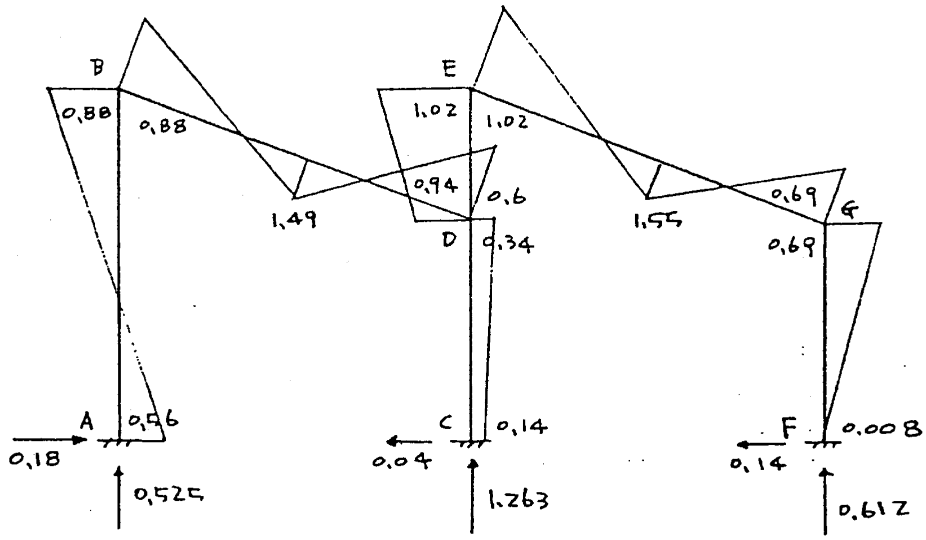
$M_{ED} = -1.667 \times 0.477 + 3.334 \times 0.495 - 2.779 \times 0.615 + 2.779 \times 0.675$
$\quad = 1.02$

$M_{EG} = 1.17 \times 0.495 - 0.585 \times 0.683 - 1.2 = -1.02$

$M_{FG} = -0.683 + 0.675 = -0.008$

$M_{GF} = -2 \times 0.683 + 0.675 = -0.69$

$M_{GE} = -1.17 \times 0.683 + 0.585 \times 0.495 + 1.2 = 0.69$



M − D
図－7・19 (d)

反力の計算

B点のつり合い (B−A)
$-8H_A + 0.56 = -0.88$
$H_A = 0.18$t (右)

D点のつり合い (D−C)
$5H_C + 0.14 = 0.34$
$H_C = 0.04$t (左)

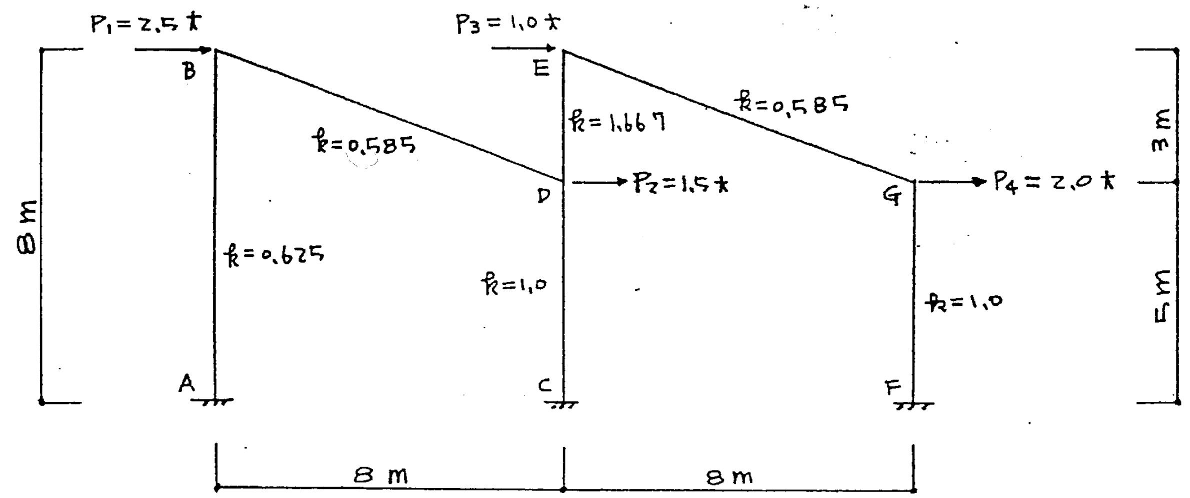
G点のつり合い (G−F)
$5H_F - 0.008 = 0.69$
$H_F = 0.14$t (左)

D点のつり合い (D−B−A)
$-0.18 \times 5 + 8V_A + 0.56 - 1.2 \times 4 = -0.94$
$V_A = 0.525$t (上)

E点のつり合い (E−G−F)
$0.14 \times 8 - 0.008 - 8V_F + 1.2 \times 4 = 1.02$
$V_F = 0.612$t (上)

$\Sigma Y = 0$ より
$-1.2 - 1.2 + 0.525 + 0.612 + V_C = 0$
$V_C = 1.263$t (上)

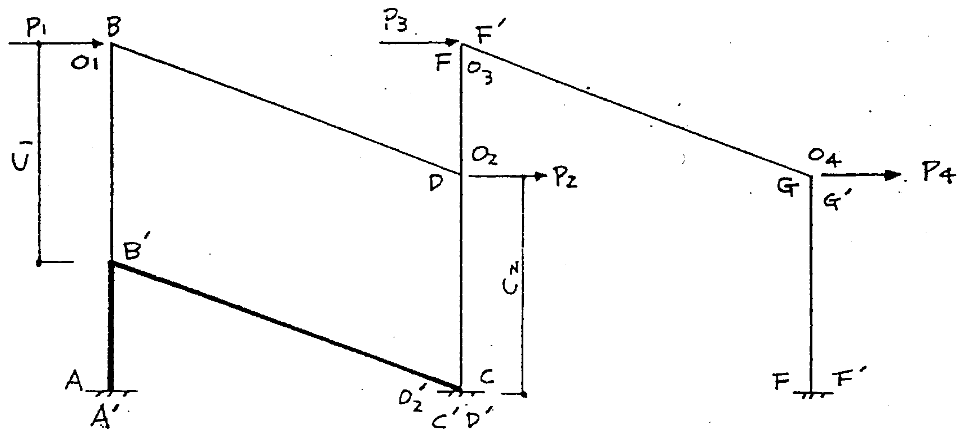
（例題 7・11）　図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



図－7・20（a）

（解）　前例題と同じラーメンであるから部材角の関係は前に準ずる事とし，こゝでは $C_1 \sim C_4$ を求める。

（Case－1）　$R_{CD} = 1$

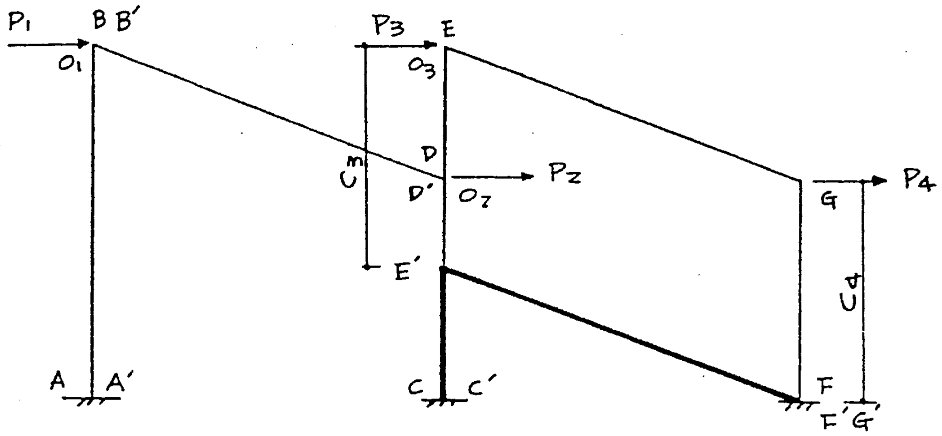


$R_{CD} = 1$
図－7・20（b）

$C_1 = C_2 = 5\,m$

$C_3 = C_4 = 0$

(Case－2)　$R_{FG}=1$



$R_{FG}=1$
図－7・20 (c)

$C_1=C_2=0$

$C_3=C_4=5m$

部材角相互の関係

	Case－1 $R_{CD}=1$	Case－2 $R_{FG}=1$	部材角
A－B	0.625	0	$0.625\,\psi_{CD}$
B－D	0	0	0
C－D	1.0	0	ψ_{CD}
D－E	－1.667	1.667	$-1.667\psi_{CD}+1.667\psi_{FG}$
E－G	0	0	0
F－G	0	1.0	ψ_{FG}

部材の中間に荷重がないので荷重項はない。

材端モーメント式

$M_{AB}=0.625\,\varphi_B+0.391\,\psi_{CD}$
$M_{BA}=1.25\,\varphi_B+0.391\,\psi_{CD}$
$M_{BD}=1.17\,\varphi_B+0.585\,\varphi_D$
$M_{CD}=\varphi_D+\psi_{CD}$
$M_{DC}=2\varphi_D+\psi_{CD}$

$M_{DB} = 0.585\varphi_B + 1.17\varphi_D$

$M_{DE} = 3.334\varphi_D + 1.667\varphi_E - 2.779\psi_{CD} + 2.779\psi_{FG}$

$M_{ED} = 1.667\varphi_D + 3.334\varphi_E - 2.779\psi_{CD} + 2.779\psi_{FG}$

$M_{EG} = 1.17\varphi_E + 0.585\varphi_G$

$M_{FG} = \varphi_G + \psi_{FG}$

$M_{GF} = 2\varphi_G + \psi_{FG}$

$M_{GE} = 0.585\varphi_E + 1.17\varphi_G$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0 \qquad M_{BA} + M_{BD} = 0$

$2.42\varphi_B + 0.585\varphi_D + 0.391\psi_{CD} = 0$ ------ (1)

$\Sigma M_D = 0 \qquad M_{DC} + M_{DB} + M_{DE} = 0$

$0.585\varphi_B + 6.504\varphi_D + 1.667\varphi_E - 1.779\psi_{CD} + 2.779\psi_{FG} = 0$ --- (2)

$\Sigma M_E = 0 \qquad M_{ED} + M_{EG} = 0$

$1.667\varphi_D + 4.504\varphi_E + 0.585\varphi_G - 2.779\psi_{CD} + 2.779\psi_{FG} = 0$ ---- (3)

$\Sigma M_G = 0 \qquad M_{GF} + M_{GE} = 0$

$0.585\varphi_E + 3.17\varphi_G + \psi_{FG} = 0$ ------ (4)

力のつり合い式

Case－1

$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 = 2.5 \times 5 + 1.5 \times 5 = 20$

$(M_{AB} + M_{BA}) \times 0.625 + (M_{CD} + M_{DC}) \times 1 + (M_{DE} + M_{ED}) \times (-1.667) + 20 = 0$

$1.172\varphi_B - 5.337\varphi_D - 8.337\varphi_E + 11.754\psi_{CD} - 9.265\psi_{FG} = -20$ --- (5)

Case－2

$\Sigma P \cdot C = P_3 \cdot C_3 + P_4 \cdot C_4 = 1 \times 5 + 2 \times 5 = 15$

$(M_{DE} + M_{ED}) \times 1.667 + (M_{FG} + M_{GF}) \times 1 + 15 = 0$

$0.337\varphi_D + 8.337\varphi_E + 3\varphi_G - 9.265\psi_{CD} + 11.265\psi_{FG} = -15$ ------ (6)

	φ_B	φ_D	φ_E	φ_G	ψ_{CD}	ψ_{FG}	右辺
$\Sigma M_B=0$	2.42	0.585			0.391		0
$\Sigma M_D=0$	0.585	6.504	1.667		−1.779	2.779	0
$\Sigma M_E=0$		1.667	4.504	0.585	−2.779	2.779	0
$\Sigma M_G=0$			0.585	3.17		1.0	0
Case−1	1.172	−5.337	−8.337		11.754	−9.265	−20
Case−2		8.337	8.337	3	−9.265	11.265	−15

連立に解いて

$\varphi_B = 1.265$, $\varphi_D = 2.772$, $\varphi_E = -0.173$, $\varphi_G = 4.548$

$\psi_{CD} = -11.977$, $\psi_{FG} = -14.316$

材端モーメント式に代入する

$M_{AB} = 0.625 \times 1.265 - 11.977 = -11.19$ (tm)

$M_{BA} = 1.25 \times 1.265 - 0.391 \times 11.977 = -3.10$

$M_{BD} = 1.17 \times 1.265 + 0.585 \times 2.772 = 3.10$

$M_{CD} = 2.772 - 11.977 = -9.21$

$M_{DC} = 2 \times 2.772 - 11.977 = -6.43$

$M_{DB} = 0.585 \times 1.265 + 1.17 \times 2.772 = 3.98$

$M_{DE} = 3.334 \times 2.772 - 1.667 \times 0.173 + 2.779 \times 11.977 - 2.779 \times 14.316 = 2.45$

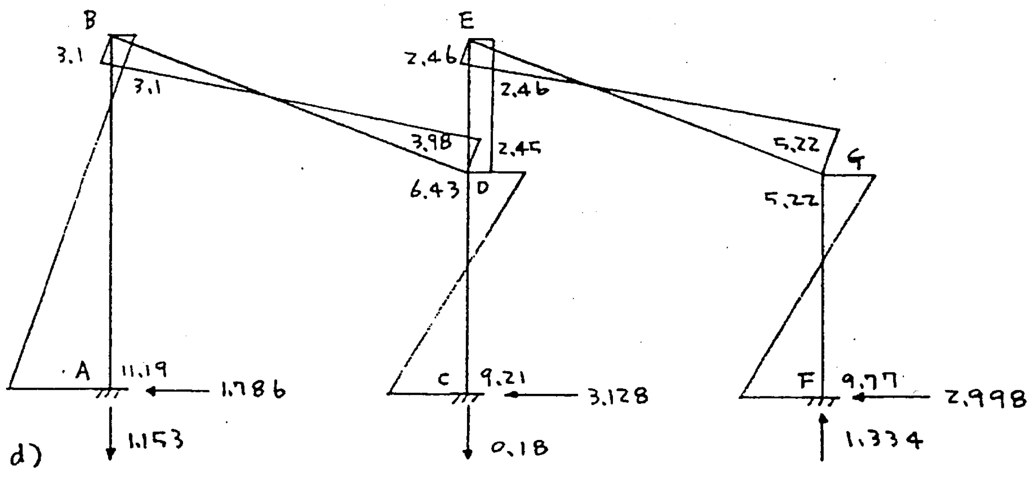
$M_{ED} = 1.667 \times 2.772 - 3.334 \times 0.173 + 2.779 \times 11.977 - 2.779 \times 14.316 = -2.46$

$M_{EG} = -1.17 \times 0.173 + 0.585 \times 4.548 = 2.46$

$M_{FG} = 4.548 - 14.316 = -9.77$

$M_{GF} = 2 \times 4.548 - 14.316 = -5.22$

$M_{GE} = -0.585 \times 0.173 + 1.17 \times 4.548 = 5.22$



M − D

図 − 7・20 (d)

反力の計算

B点のつり合い（B－A）

$8H_A - 11.19 = 3.1$ $\qquad \therefore\ H_A = 1.786$ t（左）

D点のつり合い（D－C）

$5H_D - 9.21 = 6.43$ $\qquad \therefore\ H_C = 3.128$ t（左）

G点のつり合い（G－F）

$5H_F - 9.77 = 5.22$ $\qquad \therefore\ H_F = 2.998$ t（左）

D点のつり合い（D－B－A）

$1.786 \times 5 - 11.19 - 8V_A + 2.5 \times 3 = -3.98$ $\qquad \therefore\ V_A = 1.153$ t（下）

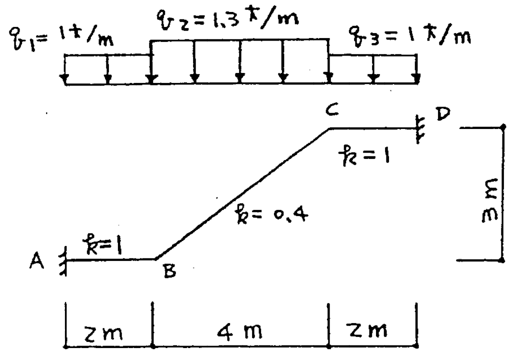
E点のつり合い（E－G－F）

$2.998 \times 8 - 9.77 - 8V_F - 2 \times 3 = -2.46$ $\qquad \therefore\ V_F = 1.334$ t（上）

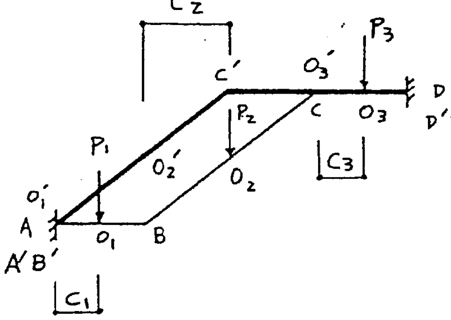
$\Sigma Y = 0$ より $\quad -1.153 + 1.334 - V_C = 0$ $\qquad \therefore\ V_C = 0.18$ t（上）

（例題 7・12）

左図の階段形梁の曲げモーメント図を求めよ。



図－7・21 (a)



$R_{AB} = 1$

図－7・21 (b)

（解）独立変形部材の数

$n = 3 - 2 \times 1 = 1$ 個

A－B部材を独立変形部材とする。

等分布荷重の合力の位置に合力を作用させる。

$P_1 = 1 \times 2 = 2$ t $= P_2$

$P_3 = 1.3 \times 4 = 5.2$ t

部材角の関係

（Case－1）$\quad R_{AB} = 1$ の時

$$C_1 = C_3 = 1\text{ m} \qquad C_2 = 2\text{ m}$$

$R_{AB} = 1$ の時

$$\left[\begin{array}{l} R_{BC} = 1 - \frac{B'C'}{BC} = 0 \\ R_{CD} = 1 - \frac{C'D'}{CD} = 1 - \frac{4}{2} = -1 \end{array}\right.$$

従って $\psi_{BC} = 0$, $\psi_{CD} = -\psi_{AB}$

C, M_0, Q_0 の計算

A－B, C－D 部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{AB} = C_{CD} = -\frac{1 \times 2^2}{12} = -0.333\ tm = -C_{BA} = -C_{DC} \\ M_0 = \frac{1 \times 2^2}{8} = 0.5\ tm \\ Q_0 = \frac{1 \times 2}{2} = 1\ t \end{array}\right.$$

B－C 部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{BC} = -\frac{1.3 \times 4^2}{12} = -1.733\ tm \\ M_0 = \frac{1.3 \times 4^2}{8} = 2.6\ tm \\ Q_0 = \frac{1.3 \times 4}{2} = 2.6\ t \end{array}\right.$$

材端モーメント式

$$M_{AB} = 1.0\,(\varphi_B + \psi_{AB}) - 0.333 = \varphi_B + \psi_{AB} - 0.333$$
$$M_{BA} = 1.0\,(2\varphi_B + \psi_{AB}) + 0.333 = 2\varphi_B + \psi_{AB} + 0.333$$
$$M_{BC} = 0.4\,(2\varphi_B + \varphi_C) - 1.733 = 0.8\varphi_B + 0.4\varphi_C - 1.733$$
$$M_{CB} = 0.4\,(2\varphi_C + \varphi_B) + 1.733 = 0.4\varphi_B + 0.8\varphi_C + 1.733$$
$$M_{CD} = 1.0\,(2\varphi_C - \psi_{AB}) - 0.333 = 2\varphi_C - \psi_{AB} - 0.333$$
$$M_{DC} = 1.0\,(\varphi_C - \psi_{AB}) + 0.333 = \varphi_C - \psi_{AB} + 0.333$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0$ $\quad M_{BA} + M_{BC} = 0$

$$2.8\varphi_B + 0.4\varphi_C + \psi_{AB} = 1.4 \qquad \text{------ (1)}$$

$\Sigma M_C = 0$ $\quad M_{CB} + M_{CD} = 0$

$$0.4\varphi_B + 2.8\varphi_C - \psi_{AB} = -1.4 \qquad \text{------- (2)}$$

力のつり合い式

(Case－1)

$$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 + P_3 \cdot C_3$$
$$= 2 \times 1 + 5.2 \times 2 + 2 \times 1 = 14.4$$

$$(M_{AB}+M_{BA})\times 1+(M_{CD}+M_{DC})\times(-1)+14.4=0$$

$$3\varphi_B+2\psi_{AB}-3\varphi_C+2\psi_{AB}=-14.4$$

$$3\varphi_B-3\varphi_C+4\psi_{AB}=-14.4 \qquad \text{-------} \ (3)$$

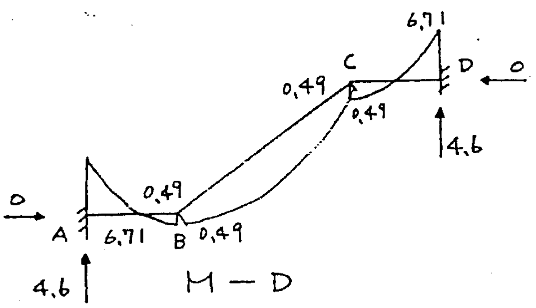
	φ_B	φ_C	ψ_{AB}	右 辺
$\Sigma M_B=0$	2.8	0.4	1.0	1.4
$\Sigma M_C=0$	0.4	2.8	−1	−1.4
Case−1	3	−3	4	−14.4

連立に解いて

$$\varphi_B=5.556,\quad \varphi_C=-5.556,\quad \psi_{AB}=-11.933$$

材端モーメント式に代入する。

$$M_{AB}=5.556-11.933-0.333=-6.71\ (\mathrm{tm})$$
$$M_{BA}=2\times5.556-11.933+0.333=-0.49$$
$$M_{BC}=0.8\times5.556-0.4\times5.556-1.733=0.49$$
$$M_{CB}=0.4\times5.556-0.8\times5.556+1.733=-0.49$$
$$M_{CD}=-2\times5.556+11.933-0.333=0.49$$
$$M_{DC}=-5.556+11.933+0.333=6.71$$



M－D

図－7・21 (c)

反力の計算

B点のつり合い (B−A)

$$2V_A-6.71-2\times1=0.49$$

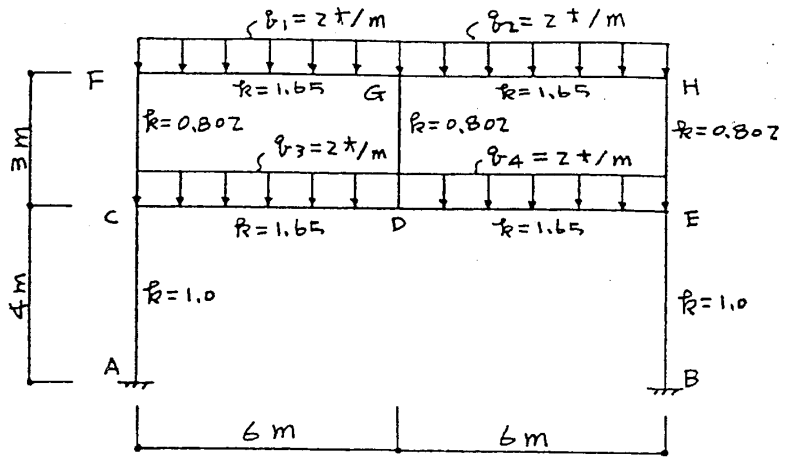
$$V_A=4.6\,\mathrm{t}=V_D\quad(上)$$

C点のつり合い

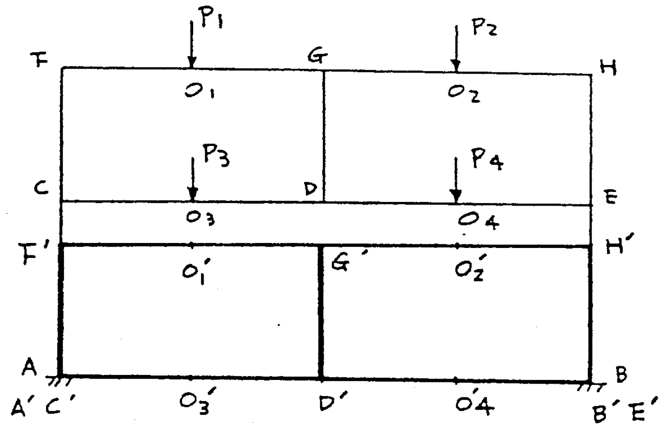
$$6\times4.6-3H_A-6.71-2\times5-5.2\times2=0.49$$

$$H_A=0=H_D$$

（例題 7・13）

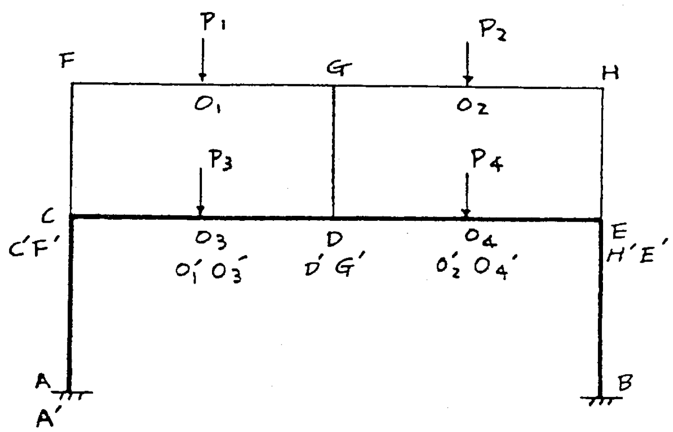


図－7・22 (a)



$R_{AC} = 1$

図－7・22 (b)



$R_{CF} = 1$

図－7・22 (c)

左図のラーメンに等分布荷重が作用した時の曲げモーメント図を求めよ。

（解）

独立変形部材の数

$n = 9 - 2 \times 3 = 3$ 個

A－C，C－F，F－G部材を独立変形部材とする。

$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 12t$

（Case－1）

$R_{AC} = 1$ の時の部材角の関係

$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$

$R_{AC} = 1$ の時

$R_{BE} = 1 - \frac{B'E'}{BE} = 1$

他の部材に部材角は生じない。

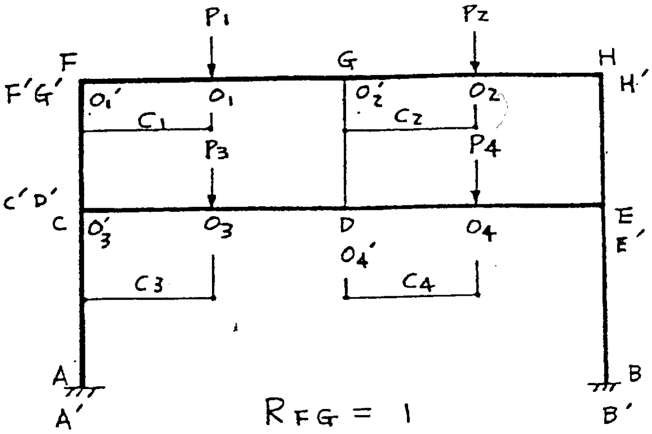
（Case－2） $R_{CF} = 1$ の時の部材角の関係

$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$

$R_{CF} = 1$ の時

$R_{DG} = R_{EH} = 1$

他の部材に部材角は生じない



$R_{FG} = 1$
図－7·22(d)

(Case－3)

$R_{FG} = 1$ の時の部材角の関係

$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 3\,m$

$R_{FG} = 1$ の時

$R_{CD} = 1 - \dfrac{C'D'}{CD} = 1$

$R_{GH} = 1 - \dfrac{G'H'}{GH} = 1 - \dfrac{12}{6}$

$= -1$

$R_{DE} = 1 - \dfrac{D'E'}{DE} = 1 - \dfrac{12}{6}$

$= -1$

他の部材に部材角は生じない

部材角相互の関係

	Case－1 $R_{AC}=1$	Case－2 $R_{CF}=1$	Case－3 $R_{FG}=1$	部　材　角
A－C	1.0			Ψ_{AC}
C－F		1.0		Ψ_{CF}
B－E	1.0			Ψ_{AC}
E－H		1.0		Ψ_{CF}
D－G		1.0		Ψ_{CF}
C－D			1.0	Ψ_{FG}
D－E			－1.0	$-\Psi_{FG}$
F－G			1.0	Ψ_{FG}
G－H			－1.0	$-\Psi_{FG}$

C, M_0, Q_0 の計算

C − D, D − E, F − G, G − H 部材

$$\begin{cases} C_{CD} = C_{DE} = C_{FG} = C_{GH} = -\dfrac{2\times 6^2}{12} = -6\,tm \\ \qquad\qquad = -C_{DC} = -C_{ED} = -C_{GF} = -C_{HG} \\ M_0 = \dfrac{2\times 6^2}{8} = 9\,tm \\ Q_0 = \dfrac{2\times 6}{2} = 6\,t \end{cases}$$

材端モーメント式

$$M_{AC} = 1.0\,(\varphi_C + \psi_{AC}) = \varphi_C + \psi_{AC}$$
$$M_{CA} = 1.0\,(2\varphi_C + \psi_{AC}) = 2\varphi_C + \psi_{AC}$$
$$M_{CD} = 1.65\,(2\varphi_C + \varphi_D + \psi_{FG}) - 6 = 3.3\varphi_C + 1.65\varphi_D + 1.65\psi_{FG} - 6.0$$
$$M_{CF} = 0.802\,(2\varphi_C + \varphi_F + \psi_{CF}) = 1.604\varphi_C + 0.802\varphi_F + 0.802\psi_{CF}$$
$$M_{DC} = 1.65\,(2\varphi_D + \varphi_C + \psi_{FG}) + 6 = 1.65\varphi_C + 3.3\varphi_D + 1.65\psi_{FG} + 6$$
$$M_{DE} = 1.65\,(2\varphi_D + \varphi_E - \psi_{FG}) - 6 = 3.3\varphi_D + 1.65\varphi_E - 1.65\psi_{FG} - 6$$
$$M_{DG} = 0.802\,(2\varphi_D + \varphi_G + \psi_{CF}) = 1.604\varphi_D + 0.802\varphi_G + 0.802\psi_{CF}$$
$$M_{BE} = 1.0\,(\varphi_E + \psi_{AC}) = \varphi_E + \psi_{AC}$$
$$M_{EB} = 1.0\,(2\varphi_E + \psi_{AC}) = 2\varphi_E + \psi_{AC}$$
$$M_{ED} = 1.65\,(2\varphi_E + \varphi_D - \psi_{FG}) + 6 = 1.65\varphi_D + 3.3\varphi_E - 1.65\psi_{FG} + 6$$
$$M_{EH} = 0.802\,(2\varphi_E + \varphi_H + \psi_{CF}) = 1.604\varphi_E + 0.802\varphi_H + 0.802\psi_{CF}$$
$$M_{FC} = 0.802\,(2\varphi_F + \varphi_C + \psi_{CF}) = 0.802\varphi_C + 1.604\varphi_F + 0.802\psi_{CF}$$
$$M_{FG} = 1.65\,(2\varphi_F + \varphi_G + \psi_{FG}) - 6 = 3.3\varphi_F + 1.65\varphi_G + 1.65\psi_{FG} - 6$$
$$M_{GD} = 0.802\,(2\varphi_G + \varphi_D + \psi_{CF}) = 0.802\varphi_D + 1.604\varphi_G + 0.802\psi_{CF}$$
$$M_{GF} = 1.65\,(2\varphi_G + \varphi_F + \psi_{FG}) + 6 = 1.65\varphi_F + 3.3\varphi_G + 1.65\psi_{FG} + 6$$
$$M_{GH} = 1.65\,(2\varphi_G + \varphi_H - \psi_{FG}) - 6 = 3.3\varphi_G + 1.65\varphi_H - 1.65\psi_{FG} - 6$$
$$M_{HE} = 0.802\,(2\varphi_H + \varphi_E + \psi_{CF}) = 0.802\varphi_E + 1.604\varphi_H + 0.802\psi_{CF}$$
$$M_{HG} = 1.65\,(2\varphi_H + \varphi_G - \psi_{FG}) + 6 = 1.65\varphi_G + 3.3\varphi_H - 1.65\psi_{FG} + 6$$

節点方程式

$\Sigma M_C = 0 \qquad M_{CA} + M_{CD} + M_{CF} = 0$

$$6.904\varphi_C + 1.65\varphi_D + 0.802\varphi_F + \psi_{AC} + 0.802\psi_{CF} + 1.65\psi_{FG} = 6.0 \qquad \text{-----}\ (1)$$

$\Sigma M_D = 0 \qquad M_{DC} + M_{DE} + M_{DG} = 0$

$$1.65\varphi_C + 8.204\varphi_D + 1.65\varphi_E + 0.802\varphi_G + 0.802\psi_{CF} = 0 \qquad \text{-----}\ (2)$$

$\Sigma M_E = 0 \qquad M_{EB} + M_{ED} + M_{EH} = 0$

$1.65\varphi_D + 6.904\varphi_E + 0.802\varphi_H + \Psi_{AC} + 0.802\Psi_{CF} - 1.65\Psi_{FG} = -6.0$ ------ (3)

$\Sigma M_F = 0 \qquad M_{FC} + M_{FG} = 0$

$0.802\varphi_C + 4.904\varphi_F + 1.65\varphi_G + 0.802\Psi_{CF} + 1.65\Psi_{FG} = 6.0$ ------ (4)

$\Sigma M_G = 0 \qquad M_{GD} + M_{GF} + M_{GH} = 0$

$0.802\varphi_D + 1.65\varphi_F + 8.204\varphi_G + 1.65\varphi_H + 0.802\Psi_{CF} = 0$ ------- (5)

$\Sigma M_H = 0 \qquad M_{HE} + M_{HG} = 0$

$0.802\varphi_E + 1.65\varphi_G + 4.904\varphi_H + 0.802\Psi_{CF} - 1.65\Psi_{FG} = -6.0$ ----- (6)

力のつり合い式

(Case－1)

$\Sigma P \cdot C = 0$

$(M_{AC} + M_{CA}) \times 1 + (M_{BE} + M_{EB}) \times 1 = 0$

$3\varphi_C + 3\varphi_E + 4\Psi_{AC} = 0$ ------- (7)

(Case－2)

$\Sigma P \cdot C = 0$

$(M_{DG} + M_{GD}) \times 1 + (M_{CF} + M_{FC}) \times 1 + (M_{EH} + M_{HE}) \times 1 = 0$

$2.406\varphi_C + 2.406\varphi_D + 2.406\varphi_E + 2.406\varphi_F + 2.406\varphi_G + 2.406\varphi_H + 4.812\Psi_{CF} = 0$

------- (8)

(Case－3)

$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 + P_3 \cdot C_3 + P_4 \cdot C_4$

$= 12 \times 3 + 12 \times 3 + 12 \times 3 + 12 \times 3 = 144$

$(M_{CD} + M_{DC}) \times 1 + (M_{FG} + M_{GF}) \times 1 + (M_{GH} + M_{HG}) \times (-1) + (M_{DE} + M_{ED}) \times (-1)$

$+ 144 = 0$

$4.95\varphi_C - 4.95\varphi_E + 4.95\varphi_F - 4.95\varphi_H = -144$ ------ (9)

	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G	φ_H	ψ_{AC}	ψ_{CF}	ψ_{FG}	右辺
$\Sigma M_C=0$	6.904	1.65		0.802			1.0	0.802	1.65	6
$\Sigma M_D=0$	1.65	8.204	1.65		0.802			0.802		0
$\Sigma M_E=0$		1.65	6.904			0.802	1.0	0.802	−1.65	−6
$\Sigma M_F=0$	0.802			4.904	1.65			0.802	1.65	6
$\Sigma M_G=0$		0.802		1.65	8.204	1.65		0.802		0
$\Sigma M_H=0$			0.802		1.65	4.904		0.802	−1.65	−6
Case-1	3		3				4			0
Case-2	2.406	2.406	2.406	2.406	2.406	2.406		4.812		0
Case-3	4.95		−4.95	4.95		−4.95				−144

連立に解いて

$\varphi_C = 4.78$, $\varphi_D = 0$, $\varphi_E = -4.78$, $\varphi_F = 7.11$, $\varphi_G = 0$

$\varphi_H = -7.11$, $\psi_{AC} = 0$, $\psi_{CF} = 0$, $\psi_{FG} = -19.83$

材端モーメント式に代入する。

$M_{AC} = 4.78 \quad (t\cdot m)$

$M_{CA} = 2 \times 4.78 = 9.56$

$M_{CD} = 3.3 \times 4.78 - 1.65 \times 19.83 - 6 = -22.95$

$M_{CF} = 1.604 \times 4.78 + 0.802 \times 8.698 = 13.37$

$M_{DC} = 1.65 \times 4.78 - 1.65 \times 19.83 + 6 = -18.83$

$M_{DE} = -1.65 \times 4.78 + 1.65 \times 19.83 - 6 = 18.83$

$M_{DG} = 0$

$M_{BE} = -4.78$

$M_{EB} = -2 \times 4.78 = -9.56$

$M_{ED} = -3.3 \times 4.78 + 1.65 \times 19.83 = 22.95$

$M_{EH} = -1.604 \times 4.78 - 0.802 \times 7.11 = -13.77$

$M_{FC} = 0.802 \times 4.78 + 1.604 \times 7.11 = 15.24$

$M_{FG} = 3.3 \times 7.11 - 1.65 \times 19.83 - 6 = -15.26$

$M_{GD} = 0$

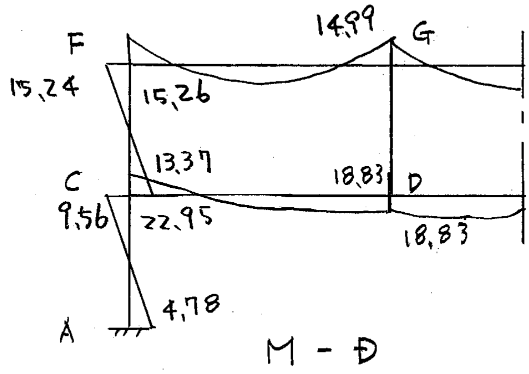
$M_{GF} = 1.65 \times 7.11 - 1.65 \times 19.83 + 6 = -14.99$

$M_{GH} = -1.65 \times 7.11 + 1.65 \times 19.83 - 6 = 14.99$

$M_{HE} = -0.802 \times 4.78 - 1.604 \times 7.11 = -15.24$

$M_{HG} = -3.3 \times 7.11 + 1.65 \times 19.83 + 6 = 15.26$

) 計算誤差



図－7・22（e）

反力の計算

C点のつり合い（C－A）

$$4H_A - 5.85 = 11.69$$

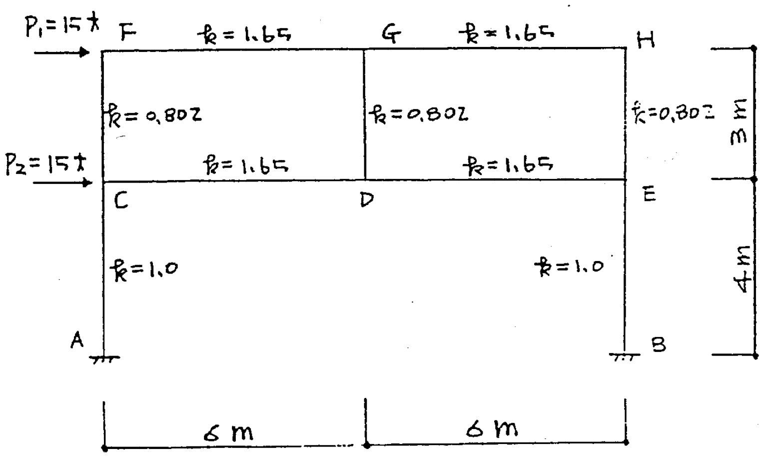
$$H_A = 1.46t \quad (左)$$

$\Sigma X = 0$ より

$$-1.46 + H_B = 0 \qquad H_B = 1.46t \quad (右)$$

$$V_A = V_B = 24t \quad (上)$$

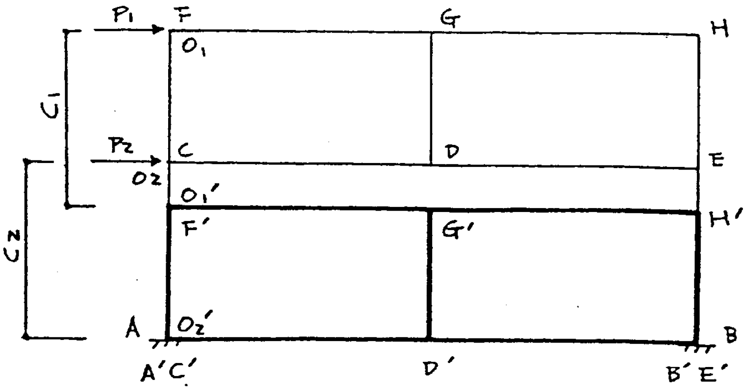
（例題 7・14）



左図のラーメンに水平荷重が作用した時の曲げモーメント図を求めよ。

図－7・23（a）

（解）　前の例題と同じラーメンであるから部材角の関係は前の例題に準ずる。　従って直角変位図より（c）を求める。

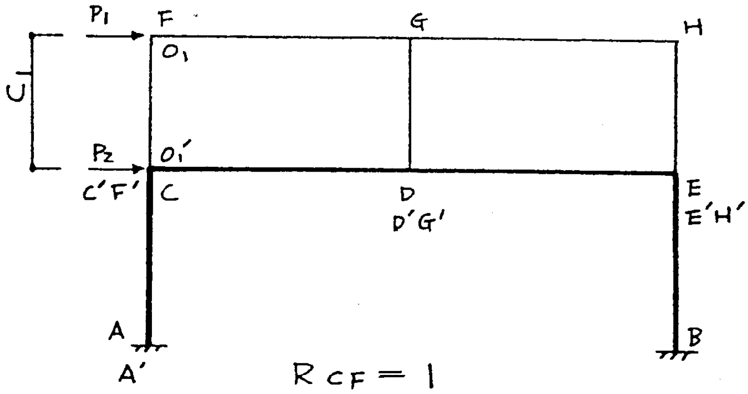


$R_{AC} = 1$

図－7・23 (b)

(Case－1) $R_{AC} = 1$ の時

$C_1 = C_2 = 4m$



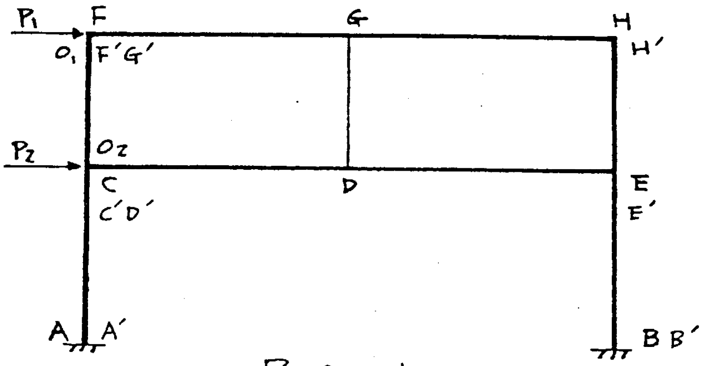
$R_{CF} = 1$

図－7・23 (c)

(Case－2) $R_{CF} = 1$ の時

$C_1 = 3m$

$C_2 = 0$



$R_{FG} = 1$

図－7・23 (d)

(Case－3)

$C_1 = C_2 = 0$

部材角相互の関係

	Case-1 $R_{AC}=1$	Case-2 $R_{CF}=1$	Case-3 $R_{FG}=1$	部材角
A — C	1.0			Ψ_{AC}
C — F		1.0		Ψ_{CF}
B — E	1.0			Ψ_{AC}
E — H		1.0		Ψ_{CF}
D — G		1.0		Ψ_{CF}
C — D			1.0	Ψ_{FG}
D — E			−1.0	$-\Psi_{FG}$
F — G			1.0	Ψ_{FG}
G — H			−1.0	$-\Psi_{FG}$

材端モーメント式

$$M_{AC} = \varphi_C + \Psi_{AC}$$
$$M_{CA} = 2\varphi_C + \Psi_{AC}$$
$$M_{CD} = 3.3\varphi_C + 1.65\varphi_D + 1.65\Psi_{FG}$$
$$M_{CF} = 1.604\varphi_C + 0.802\varphi_F + 0.802\Psi_{CF}$$
$$M_{DC} = 1.65\varphi_C + 3.3\varphi_D + 1.65\Psi_{FG}$$
$$M_{DE} = 3.3\varphi_D + 1.65\varphi_E - 1.65\Psi_{FG}$$
$$M_{DG} = 1.604\varphi_D + 0.802\varphi_G + 0.802\Psi_{CF}$$
$$M_{BE} = \varphi_E + \Psi_{AC}$$
$$M_{EB} = 2\varphi_E + \Psi_{AC}$$
$$M_{ED} = 3.3\varphi_E + 1.65\varphi_D - 1.65\Psi_{FG}$$
$$M_{EH} = 1.604\varphi_E + 0.802\varphi_H + 0.802\Psi_{CF}$$
$$M_{FC} = 0.802\varphi_C + 1.604\varphi_F + 0.802\Psi_{CF}$$
$$M_{FG} = 3.3\varphi_F + 1.65\varphi_G + 1.65\Psi_{FG}$$
$$M_{GD} = 0.802\varphi_D + 1.604\varphi_G + 0.802\Psi_{CF}$$
$$M_{GF} = 1.65\varphi_F + 3.3\varphi_G + 1.65\Psi_{FG}$$
$$M_{GH} = 3.3\varphi_G + 1.65\varphi_H - 1.65\Psi_{FG}$$
$$M_{HE} = 0.802\varphi_E + 1.604\varphi_H + 0.802\Psi_{CF}$$
$$M_{HG} = 1.65\varphi_G + 3.3\varphi_H - 1.65\Psi_{FG}$$

節点方程式

$\Sigma M_C = 0 \qquad M_{CA} + M_{CD} + M_{CF} = 0$

$6.904\varphi_C + 1.65\varphi_D + 0.802\varphi_F + \Psi_{AC} + 0.802\Psi_{CF} + 1.65\Psi_{FG} = 0$ ---- (1)

$\Sigma M_D = 0 \qquad M_{DC} + M_{DE} + M_{DG} = 0$

$1.65\varphi_C + 8.204\varphi_D + 1.65\varphi_E + 0.802\varphi_G + 0.802\Psi_{CF} = 0$ ------ (2)

$\Sigma M_E = 0 \qquad M_{EB} + M_{ED} + M_{EH} = 0$

$1.65\varphi_D + 6.904\varphi_E + 0.802\varphi_H + \Psi_{AC} + 0.802\Psi_{CF} - 1.65\Psi_{FG} = 0$ --- (3)

$\Sigma M_F = 0 \qquad M_{FC} + M_{FG} = 0$

$0.802\varphi_C + 4.904\varphi_F + 1.65\varphi_G + 0.802\Psi_{CF} + 1.65\Psi_{FG} = 0$ ----- (4)

$\Sigma M_G = 0 \qquad M_{GD} + M_{GF} + M_{GH} = 0$

$0.802\varphi_D + 1.65\varphi_F + 8.204\varphi_G + 1.65\varphi_H + 0.802\Psi_{CF} = 0$ ------ (5)

$\Sigma M_H = 0$

$0.802\varphi_E + 1.65\varphi_G + 4.904\varphi_H + 0.802\Psi_{CF} - 1.65\Psi_{FG} = 0$ ------ (6)

力のつり合い式

(Case－1)

$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 = 15 \times 4 + 15 \times 4 = 120$

$(M_{AC} + M_{CA}) \times 1 + (M_{BE} + M_{EB}) \times 1 + 120 = 0$

$3\varphi_C + 3\varphi_E + 4\Psi_{AC} = -120$ ------ (7)

(Case－2)

$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 = 15 \times 3 = 45$

$(M_{CF} + M_{FC}) \times 1 + (M_{DG} + M_{GD}) \times 1 + (M_{EH} + M_{HE}) \times 1 + 45 = 0$

$2.406\varphi_C + 2.406\varphi_D + 2.406\varphi_E + 2.406\varphi_F + 2.406\varphi_G + 2.406\varphi_H$
$+ 4.812\Psi_{CF} = -45$ ----- (8)

(Case − 3)　　$\Sigma P \cdot C = 0$

$$(M_{CD}+M_{DC})\times 1+(M_{FG}+M_{GF})\times 1+(M_{GH}+M_{HG})\times(-1)+(M_{DE}+M_{ED})\times(-1)=0$$

$$4.95\,\varphi_C-4.95\,\varphi_E+4.95\,\varphi_F-4.95\,\varphi_H=0 \qquad \text{------ (3)}$$

	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G	φ_H	ψ_{AC}	ψ_{CF}	ψ_{FG}	右辺
$\Sigma M_C=0$	6.904	1,65		0,802			1,0	0,802	1,65	0
$\Sigma M_D=0$	1,65	8,204	1,65		0,802			0,802		0
$\Sigma M_E=0$		1,65	6.904			0,802	1,0	0,802	−1,65	0
$\Sigma M_F=0$	0,802			4.904	1,65			0,802	1,65	0
$\Sigma M_G=0$		0,802		1,65	8,204	1,65		0,802		0
$\Sigma M_H=0$			0,802		1,65	4.904		0,802	−1,65	0
Case−1	3		3				4			−120
Case−2	2,406	2,406	2,406	2,406	2,406	2,406		4,812		−45
Case−3	4.95		−4.95	4.95		−4.95				0

連立に解いて

$\varphi_C = 8{,}778$,　$\varphi_D = -1{,}81$,　$\varphi_E = 8{,}778$,　$\varphi_F = 1{,}17$, $\varphi_G = 1{,}582$

$\varphi_H = 1{,}17$,　$\psi_{AC} = -43{,}167$,　$\psi_{CF} = -19{,}185$,　$\psi_{FG} = 0$

材端モーメント式に代入する

$M_{AC} = 8{,}778 - 43{,}167 = -34{,}39$ (tm)

$M_{CA} = 2\times 8{,}778 - 43{,}167 = -25{,}61$

$M_{CD} = 3{,}3\times 8{,}778 - 1{,}65\times 1{,}81 = 25{,}98$

$M_{CF} = 1{,}604\times 8{,}778 + 0{,}802\times 1{,}17 - 0{,}802\times 19{,}185 = -0{,}37$

$M_{DC} = 1{,}65\times 8{,}778 - 3{,}3\times 1{,}81 = 8{,}51$

$M_{DE} = -3{,}3\times 1{,}81 + 1{,}65\times 8{,}778 = 8{,}51$

$M_{DG} = -1{,}604\times 1{,}81 + 0{,}802\times 1{,}582 - 0{,}802\times 19{,}185 = -17{,}02$

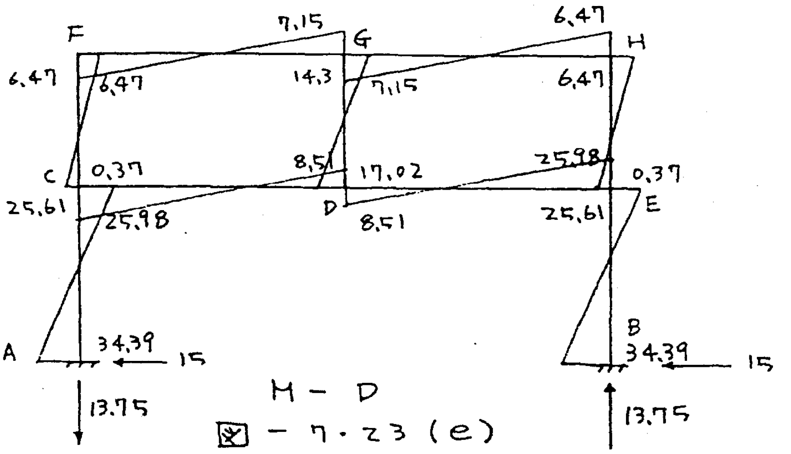
$M_{BE} = 8{,}778 - 43{,}167 = -34{,}39$

$M_{EB} = 2\times 8{,}778 - 43{,}167 = -25{,}61$

$M_{ED} = 3{,}3\times 8{,}778 - 1{,}65\times 1{,}81 = 25{,}98$

$M_{EH} = 1{,}604\times 8{,}778 + 0{,}802\times 1{,}17 - 0{,}802\times 19{,}185 = -0{,}37$

$$M_{FC} = 0.802 \times 8.778 + 1.604 \times 1.17 - 0.802 \times 19.185 = -6.47$$
$$M_{FG} = 3.3 \times 1.17 + 1.65 \times 1.582 = 6.47$$
$$M_{GD} = -0.802 \times 1.81 + 1.604 \times 1.582 - 0.802 \times 19.185 = -14.3$$
$$M_{GF} = 1.65 \times 1.17 + 3.3 \times 1.582 = 7.15$$
$$M_{GH} = 3.3 \times 1.582 + 1.65 \times 1.17 = 7.15$$
$$M_{HE} = 0.802 \times 8.778 + 1.604 \times 1.17 - 0.802 \times 19.185 = -6.47$$
$$M_{HG} = 1.65 \times 1.582 + 3.3 \times 1.17 = 6.47$$



M − D
図 − 7・23 (e)

C点のつり合い (C−A)

$4H_A - 34.39 = 25.61$　　　∴ $H_A = 15.0$ ㌧ (左) $= H_B$

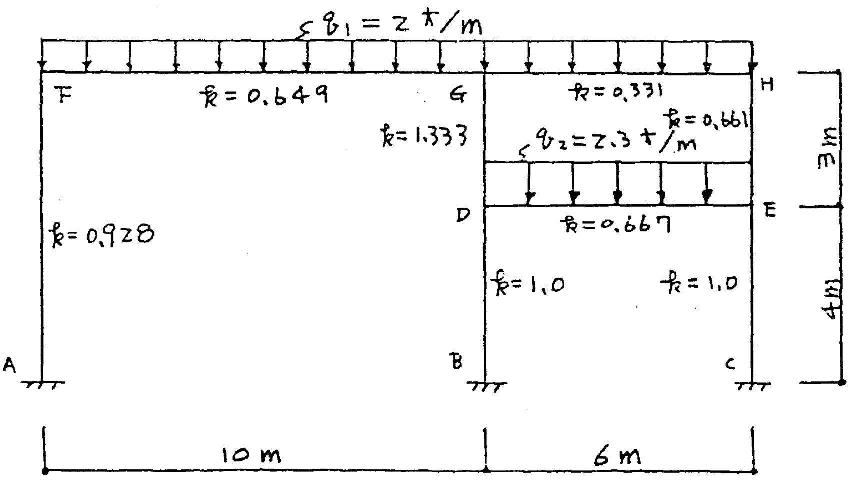
A点のつり合い (A−B)

$-12V_B - 34.39 + 15 \times 7 + 15 \times 4 = -34.39$

$V_B = 13.75$ ㌧ (上)

$\Sigma Y = 0$ より　$V_A = 13.75$ ㌧ (下)

(例題 7・15)



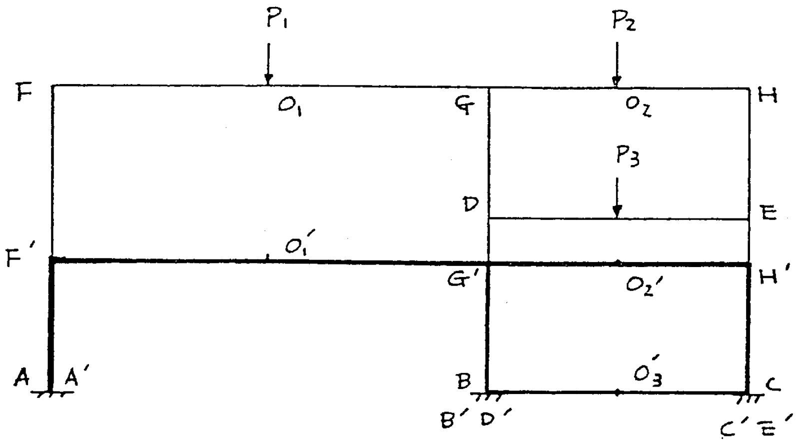
左図の吹抜ラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

(解)　独立変形部材の数　$n = 8 - 2 \times 3 = 2$ 個

B−D, D−G 部材を独立変形部材とする。

等分布荷重の合力の位置に作用する合力を求める。

$P_1 = 2 \times 10 = 20$ t　　$P_2 = 2 \times 6 = 12$ t　　$P_3 = 2.3 \times 6 = 13.8$ t



$R_{BD} = 1$

図−7・24 (b)

(Case−1)

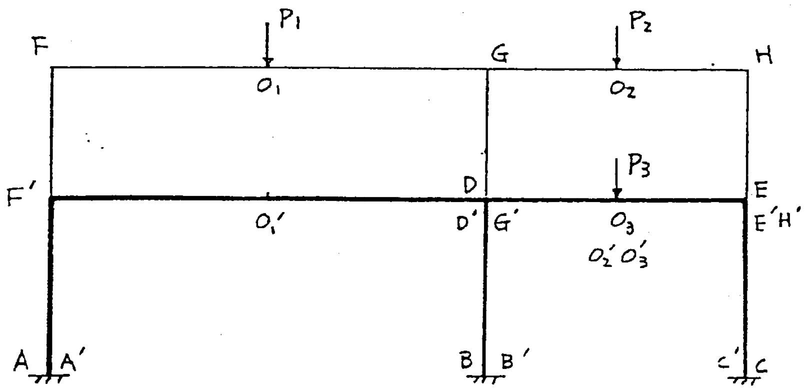
$R_{BD} = 1$ の時

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$

$R_{BD} = 1$

$R_{CE} = 1$

$R_{AF} = 1 - \frac{3}{7} = 0.571$



$R_{DG} = 1$

図−7・24 (c)

(Case−2)

$R_{DG} = 1$ の時

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$

$R_{DG} = 1$

$R_{EH} = 1$

$R_{AF} = 1 - \frac{4}{7} = 0.429$

部材角相互の関係 (梁に部材角は生じない)

	Case−1 $R_{BD}=1$	Case−2 $R_{DG}=1$	部　材　角
A − F	0.571	0.429	$0.571\Psi_B + 0.429\Psi_{DG}$
B − D	1.0		Ψ_{BD}
D − G		1.0	Ψ_{DG}
C − E	1.0		Ψ_{BD}
E − H		1.0	Ψ_{DG}

C, M₀, Q₀ の計算

F − G部材

$$\begin{cases} C_{FG} = -\dfrac{2\times 10^2}{12} = -16.667\,\text{tm} = -C_{GF} \\ M_0 = \dfrac{2\times 10^2}{8} = 25\,\text{tm} \\ Q_0 = \dfrac{2\times 10}{2} = 10\,\text{t} \end{cases}$$

D − E 部材

$$\begin{cases} C_{DE} = -\dfrac{2.3\times 6^2}{12} = -6.9\,\text{tm} = -C_{ED} \\ M_0 = \dfrac{2.3\times 6^2}{8} = 10.35\,\text{tm} \\ Q_0 = \dfrac{2.3\times 6}{2} = 6.9\,\text{t} \end{cases}$$

G − H 部材

$$\begin{cases} C_{GH} = -\dfrac{2\times 6^2}{12} = -6\,\text{tm} = -C_{HG} \\ M_0 = \dfrac{2\times 6^2}{8} = 9\,\text{tm} \\ Q_0 = \dfrac{2\times 6}{2} = 6\,\text{t} \end{cases}$$

材端モーメント式

$$M_{AF} = 0.928(\varphi_F + 0.571\psi_{BD} + 0.429\psi_{DG}) = 0.928\varphi_F + 0.53\psi_{BD} + 0.398\psi_{DG}$$
$$M_{FA} = 0.928(2\varphi_F + 0.571\psi_{BD} + 0.429\psi_{DG}) = 1.856\varphi_F + 0.53\psi_{BD} + 0.398\psi_{DG}$$
$$M_{FG} = 0.649(2\varphi_F + \varphi_G) - 16.667 = 1.298\varphi_F + 0.649\varphi_G - 16.667$$
$$M_{BD} = 1.0(\varphi_D + \psi_{BD}) = \varphi_D + \psi_{BD}$$
$$M_{DB} = 1.0(2\varphi_D + \psi_{BD}) = 2\varphi_D + \psi_{BD}$$
$$M_{DE} = 0.667(2\varphi_D + \varphi_E) - 6.9 = 1.334\varphi_D + 0.667\varphi_E - 6.9$$
$$M_{DG} = 1.333(2\varphi_D + \varphi_G + \psi_{DG}) = 2.666\varphi_D + 1.333\varphi_G + 1.333\psi_{DG}$$
$$M_{CE} = 1.0(\varphi_E + \psi_{BD}) = \varphi_E + \psi_{BD}$$
$$M_{EC} = 1.0(2\varphi_E + \psi_{BD}) = 2\varphi_E + \psi_{BD}$$
$$M_{ED} = 0.667(2\varphi_E + \varphi_D) + 6.9 = 1.334\varphi_E + 0.667\varphi_D + 6.9$$
$$M_{EH} = 0.661(2\varphi_E + \varphi_H + \psi_{DG}) = 1.322\varphi_E + 0.661\varphi_H + 0.661\psi_{DG}$$
$$M_{GD} = 1.333(2\varphi_G + \varphi_D + \psi_{DG}) = 2.666\varphi_G + 1.333\varphi_D + 1.333\psi_{DG}$$
$$M_{GF} = 0.649(2\varphi_G + \varphi_F) + 16.667 = 0.649\varphi_F + 1.298\varphi_G + 16.667$$
$$M_{GH} = 0.331(2\varphi_G + \varphi_H) - 6 = 0.662\varphi_G + 0.331\varphi_H - 6$$
$$M_{HE} = 0.661(2\varphi_H + \varphi_E + \psi_{DG}) = 0.661\varphi_E + 1.322\varphi_H + 0.661\psi_{DG}$$
$$M_{HG} = 0.331(2\varphi_H + \varphi_G) + 6 = 0.331\varphi_G + 0.662\varphi_H + 6$$

節点方程式

$\Sigma M_D = 0 \qquad M_{DB} + M_{DE} + M_{DG} = 0$

$0.667\varphi_E + 6\varphi_D + 1.333\varphi_G + \Psi_{BD} + 1.333\Psi_{DG} = 6.9$ ------ (1)

$\Sigma M_E = 0 \qquad M_{EC} + M_{ED} + M_{EH} = 0$

$0.667\varphi_D + 4.656\varphi_E + 0.661\varphi_H + \Psi_{BD} + 0.661\Psi_{DG} = -6.9$ ------ (2)

$\Sigma M_F = 0 \qquad M_{FA} + M_{FG} = 0$

$3.154\varphi_F + 0.649\varphi_G + 0.53\Psi_{BD} + 0.398\Psi_{DG} = 16.667$ ------ (3)

$\Sigma M_G = 0 \qquad M_{GD} + M_{GF} + M_{GH} = 0$

$1.333\varphi_D + 0.649\varphi_F + 4.626\varphi_G + 0.331\varphi_H + 1.333\Psi_{DG} = -10.667$ --- (4)

$\Sigma M_H = 0 \qquad M_{HE} + M_{HG} = 0$

$0.661\varphi_E + 0.331\varphi_G + 1.984\varphi_H + 0.661\Psi_{DG} = -6$ ------ (5)

力のつり合い式

(Case－1)

$\Sigma P \cdot C = 0$

$(M_{BD} + M_{DB}) \times 1 + (M_{CE} + M_{EC}) \times 1 + (M_{AF} + M_{FA}) \times 0.571 = 0$

$3\varphi_D + 3\varphi_E + 1.59\varphi_F + 4.605\Psi_{BD} + 0.455\Psi_{DG} = 0$ ------ (6)

(Case－2)

$\Sigma P \cdot C = 0$

$(M_{DG} + M_{GD}) \times 1 + (M_{EH} + M_{HE}) \times 1 + (M_{AF} + M_{FA}) \times 0.429 = 0$

$3.999\varphi_D + 1.983\varphi_E + 1.194\varphi_F + 3.999\varphi_G + 1.983\varphi_H + 0.455\Psi_{BD}$
$+ 4.329\Psi_{DG} = 0$ ------ (7)

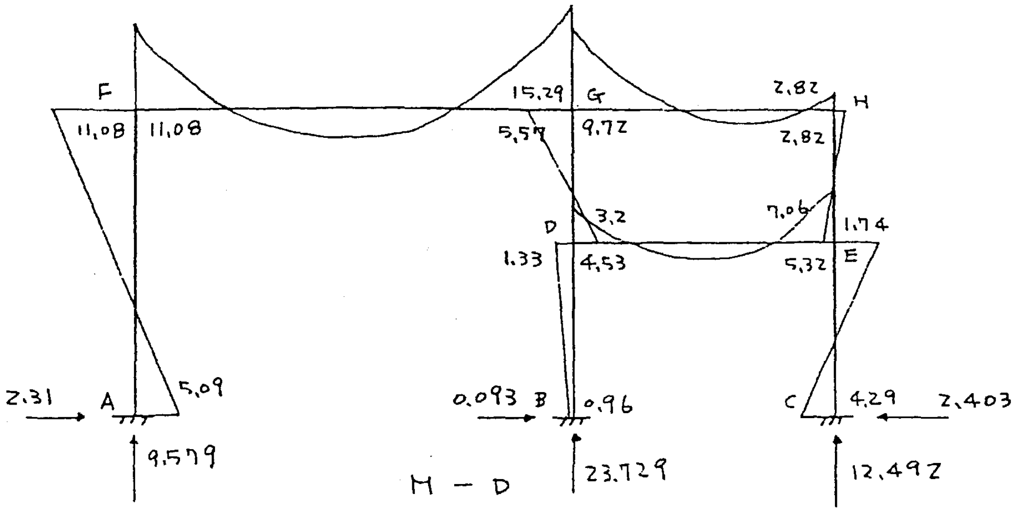
	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G	φ_H	ψ_{BD}	ψ_{DG}	右辺
$\Sigma M_D=0$	6	0,667		1,333		1,0	1,333	6,9
$\Sigma M_E=0$	0,667	4,656			0,661	1,0	0,661	−6,9
$\Sigma M_F=0$			3,154	0,649		0,53	0,398	16,667
$\Sigma M_G=0$	1,333		0,649	4,626	0,331		1,333	−10,667
$\Sigma M_H=0$		0,661		0,331	1,984		0,661	−6
Case−1	3	3	1,59			4,605	0,455	0
Case−2	3,999	1,983	1,194	3,999	1,983	0,455	4,329	0

連立に解いて

$\varphi_D = 2.294$,　$\varphi_E = -1.03$,　$\varphi_F = 6.449$,　$\varphi_G = -4.285$
$\varphi_H = -2.664$,　$\psi_{BD} = -3.257$,　$\psi_{DG} = 2.095$,

材端モーメント式に代入する。

$M_{AF} = 0.928 \times 6.449 - 0.53 \times 3.257 + 0.398 \times 2.095 = 5.09\ (tm)$
$M_{FA} = 1.856 \times 6.449 - 0.53 \times 3.257 + 0.398 \times 2.095 = 11.08$
$M_{FG} = 1.298 \times 6.449 - 0.649 \times 4.285 - 16.667 = -11.08$
$M_{BD} = 2.294 - 3.257 = -0.96$
$M_{DB} = 2 \times 2.294 - 3.257 = 1.33$
$M_{DE} = 1.334 \times 2.294 - 0.667 \times 1.03 - 6.9 = -4.53$
$M_{DG} = 2.666 \times 2.294 - 1.333 \times 4.285 + 1.333 \times 2.095 = 3.2$
$M_{CE} = -1.03 - 3.257 = -4.29$
$M_{EC} = -2 \times 1.03 - 3.257 = -5.32$
$M_{ED} = 0.667 \times 2.294 - 1.334 \times 1.03 + 6.9 = 7.06$
$M_{EH} = -1.322 \times 1.03 - 0.661 \times 2.664 + 0.661 \times 2.095 = -1.74$
$M_{GD} = 1.333 \times 2.294 - 2.666 \times 4.285 + 1.333 \times 2.095 = -5.57$
$M_{GF} = 0.649 \times 6.449 - 1.298 \times 4.285 + 16.667 = 15.29$
$M_{GH} = -0.662 \times 4.285 - 0.331 \times 2.664 - 6 = -9.72$
$M_{HE} = -0.661 \times 1.03 - 1.322 \times 2.664 + 0.661 \times 2.095 = -2.82$
$M_{HG} = -0.331 \times 4.285 - 0.662 \times 2.664 + 6 = 2.82$



M − D

図−7・24 (d)

反力の計算

F点のつり合い（F − A）

$-7H_A + 5.09 = -11.08$　　　∴ $H_A = 2.31$ t（右）

D点のつり合い（D − B）

$-4H_B - 0.96 = -1.33$　　　∴ $H_B = 0.093$ t（右）

E点のつり合い（E − C）

$4H_C - 4.29 = 5.32$　　　∴ $H_C = 2.403$ t（左）

G点のつり合い（G − F − A）

$-2.31\times 7 + 5.09 + 10V_A - 20\times 5 = -15.29$　　　∴ $V_A = 9.579$ t（上）

B点のつり合い

$9.579\times 10 + 5.09 - 20\times 5 + 12\times 3 + 13.8\times 3 - 6V_C - 4.29 = -0.96$

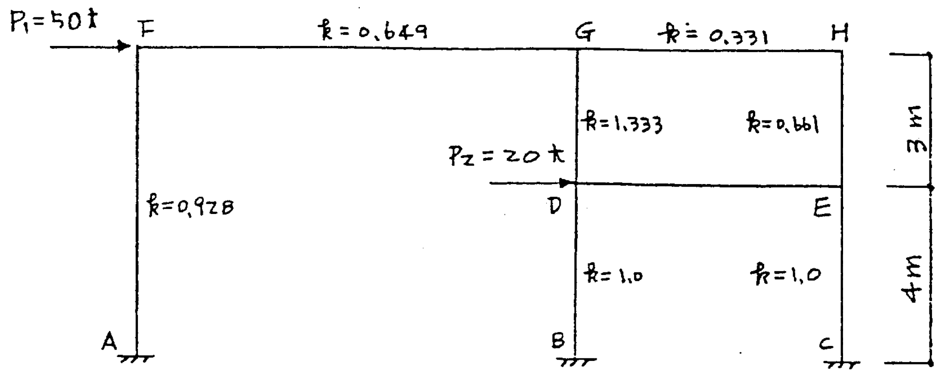
$V_C = 12.492$ t（上）

$\Sigma Y = 0$ より

$9.579 + 12.492 + V_B - 45.8 = 0$

∴ $V_B = 23.729$ t

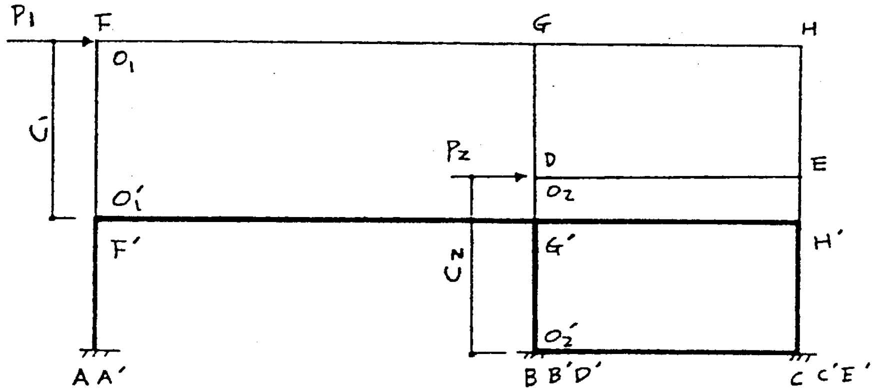
（例題 7・16）



左図の吹抜ラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

図－7・25 (a)

（解）　例題7・16 と同じラーメンであるから，部材角の関係は例題 7・16 に準ずる。従って直角変位図より C を求める。



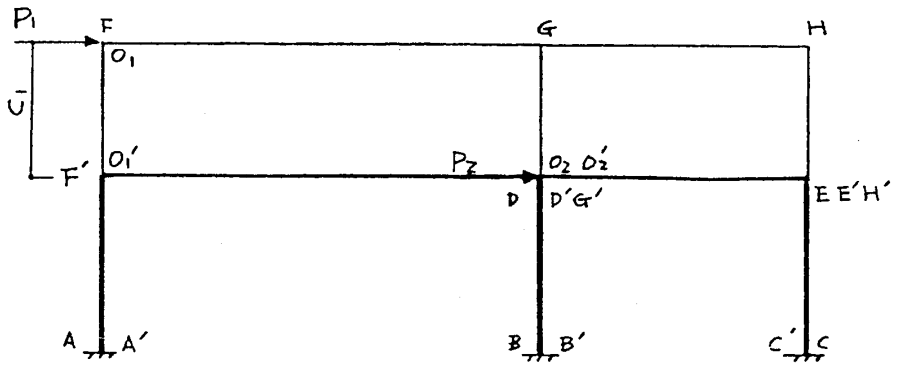
（Case－1）

$R_{BD}=1$ の時

$C_1=C_2=4m$

$R_{BD}=1$

図－7・25 (b)



（Case－2）

$C_1=3m$

$C_2=0$

$R_{DG}=1$

図－7・25 (c)

部材角相互の関係

	Case-1 $R_{BD}=1$	Case-2 $R_{DG}=1$	部　材　角
A − F	0.571	0.429	$0.571\psi_B+0.429\psi_{DG}$
B − D	1.0		ψ_{BD}
D − G		1.0	ψ_{DG}
C − E	1.0		ψ_{BD}
E − H		1.0	ψ_{DG}

材端モーメント式

$$M_{AF} = 0.928\varphi_F + 0.53\psi_{BD} + 0.398\psi_{DG}$$
$$M_{FA} = 1.856\varphi_F + 0.53\psi_{BD} + 0.398\psi_{DG}$$
$$M_{FG} = 1.298\varphi_F + 0.649\varphi_G$$
$$M_{BD} = \varphi_D + \psi_{BD}$$
$$M_{DB} = 2\varphi_D + \psi_{BD}$$
$$M_{DE} = 1.334\varphi_D + 0.667\varphi_E$$
$$M_{DG} = 2.666\varphi_D + 1.333\varphi_G + 1.333\psi_{DG}$$
$$M_{CE} = \varphi_E + \psi_{BD}$$
$$M_{EC} = 2\varphi_E + \psi_{BD}$$
$$M_{ED} = 1.334\varphi_E + 0.667\varphi_D$$
$$M_{EH} = 1.322\varphi_E + 0.661\varphi_H + 0.661\psi_{DG}$$
$$M_{GD} = 1.333\varphi_D + 2.666\varphi_G + 1.333\psi_{DG}$$
$$M_{GF} = 0.649\varphi_F + 1.298\varphi_G$$
$$M_{GH} = 0.662\varphi_G + 0.331\varphi_H$$
$$M_{HE} = 0.661\varphi_E + 1.322\varphi_H + 0.661\psi_{DG}$$
$$M_{HG} = 0.331\varphi_G + 0.662\varphi_H$$

節点方程式

$\Sigma M_D = 0$　　　$M_{DB} + M_{DE} + M_{DG} = 0$

$$6\varphi_D + 0.667\varphi_E + 1.333\varphi_G + \psi_{BD} + 1.333\psi_{DG} = 0 \qquad \text{-------} \quad (1)$$

$\Sigma M_E = 0$　　　$M_{EC} + M_{ED} + M_{EH} = 0$

$$0.667\varphi_D + 4.656\varphi_E + 0.661\varphi_H + \psi_{BD} + 0.661\psi_{DG} = 0 \qquad \text{-------} \quad (2)$$

$\Sigma M_F = 0 \qquad M_{FA} + M_{FG} = 0$

$$3.154\,\varphi_F + 0.649\,\varphi_G + 0.53\,\psi_{BD} + 0.398\,\psi_{DG} = 0 \quad \text{------} \ (3)$$

$\Sigma M_G = 0 \qquad M_{GD} + M_{GF} + M_{GH} = 0$

$$1.333\,\varphi_D + 0.649\,\varphi_F + 4.626\,\varphi_G + 0.331\,\varphi_H + 1.333\,\psi_{DG} = 0 \quad \text{----} \ (4)$$

$\Sigma M_H = 0 \qquad M_{HE} + M_{HG} = 0$

$$0.661\,\varphi_E + 0.331\,\varphi_G + 1.984\,\varphi_H + 0.661\,\psi_{DG} = 0 \quad \text{------} \ (5)$$

力のつり合い式

(Case－1)

$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 = 50 \times 4 + 20 \times 4 = 280$

$(M_{BD} + M_{DB}) \times 1 + (M_{CE} + M_{EC}) \times 1 + (M_{AF} + M_{FA}) \times 0.571 + 280 = 0$

$$3\varphi_D + 3\varphi_E + 1.59\,\varphi_F + 4.605\,\psi_{BD} + 0.455\,\psi_{DG} = -280 \quad \text{------} \ (6)$$

(Case－2)

$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 = 150$

$(M_{DG} + M_{GD}) \times 1 + (M_{EH} + M_{HE}) \times 1 + (M_{AF} + M_{FA}) \times 0.429 + 150 = 0$

$$3.999\,\varphi_D + 1.983\,\varphi_E + 1.194\,\varphi_F + 3.999\,\varphi_G + 1.983\,\varphi_H + 0.455\,\psi_{BD} + 4.329\,\psi_{DG} = -150 \quad \text{------} \ (7)$$

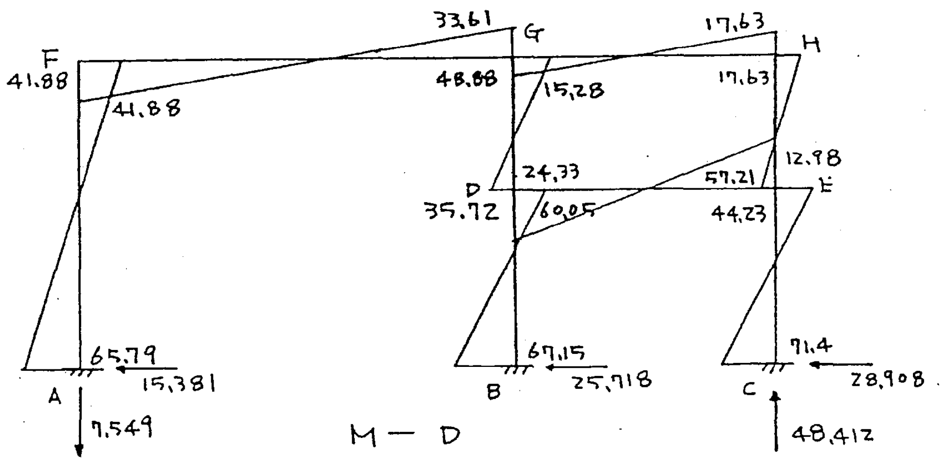
	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G	φ_H	ψ_{BD}	ψ_{DG}	右辺
$\Sigma M_D = 0$	6	0.667		1.333		1.0	1.333	0
$\Sigma M_E = 0$	0.667	4.656			0.661	1.0	0.661	0
$\Sigma M_F = 0$			3.154	0.649		0.53	0.398	0
$\Sigma M_G = 0$	1.333		0.649	4.626	0.331		1.333	0
$\Sigma M_H = 0$		0.661		0.331	1.984		0.661	0
Case－1	3	3	1.59			4.605	0.455	－280
Case－2	3.999	1.983	1.194	3.999	1.983	0.455	4.329	－150

連立に解いて

$\varphi_D = 31.427$, $\varphi_E = 27.172$, $\varphi_F = 25.764$, $\varphi_G = 13.008$

$\varphi_H = 20.132$, $\psi_{BD} = -98.576$, $\psi_{DG} = -94.112$

$M_{AF} = 0.928 \times 25.764 - 0.53 \times 98.576 - 0.398 \times 94.112 = -65.79$ (t·m)
$M_{FA} = 1.856 \times 25.764 - 0.53 \times 98.576 - 0.398 \times 94.112 = -41.88$
$M_{BD} = 31.427 - 98.576 = -67.15$
$M_{DE} = 1.334 \times 31.427 + 0.667 \times 27.172 = 60.05$
$M_{DG} = 2.666 \times 31.427 + 1.333 \times 13.008 - 1.333 \times 94.112 = -24.33$
$M_{CE} = 27.172 - 98.576 = -71.4$
$M_{EC} = 2 \times 27.172 - 98.576 = -44.23$
$M_{ED} = 0.667 \times 31.427 + 1.334 \times 27.172 = 57.21$
$M_{EH} = 1.322 \times 27.172 + 0.661 \times 20.132 - 0.661 \times 94.112 = -12.98$
$M_{GD} = 1.333 \times 31.427 + 2.666 \times 13.008 - 1.333 \times 94.112 = -48.88$
$M_{GF} = 0.649 \times 25.764 + 1.298 \times 13.008 = 33.61$
$M_{GH} = 0.662 \times 13.008 + 0.331 \times 20.132 = 15.28$
$M_{HE} = 0.661 \times 27.172 + 1.322 \times 20.132 - 0.661 \times 94.112 = -17.63$
$M_{HG} = 0.331 \times 13.008 + 0.662 \times 20.132 = 17.63$
$M_{FG} = 1.298 \times 25.764 + 0.649 \times 13.008 = 41.88$
$M_{DB} = 2 \times 31.427 - 98.576 = -35.72$



図－7・26 (d)

F点のつり合い

$7H_A - 65.79 = 41.88$ $\qquad \therefore H_A = 15.381$ t

D点のつり合い

$4H_B - 67.15 = 35.72$ $\qquad \therefore H_B = 25.718$ t

E点のつり合い

$4H_C - 71.4 = 44.23 \qquad \therefore H_C = 28.908\,t$

G点のつり合い（G−F−A）

$15.381 \times 7 - 10V_A - 65.79 = -33.61 \qquad \therefore V_A = 7.549\,t$（下）

B点のつり合い

$-7.549 \times 1.0 - 65.79 + 50 \times 7 + 20 \times 4 - 6V_C - 71.4 = -67.15$

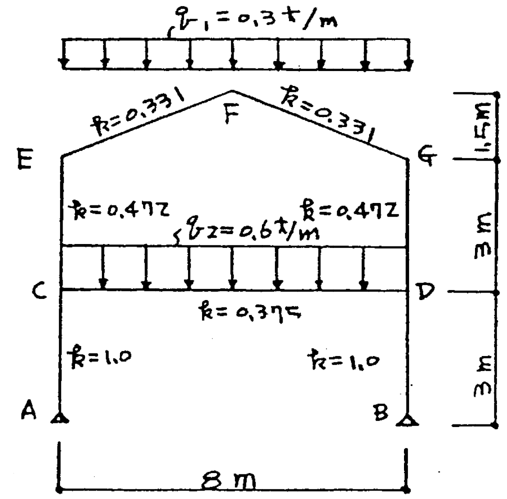
$V_C = 47.412\,t$（上）

$\Sigma Y = 0$ より

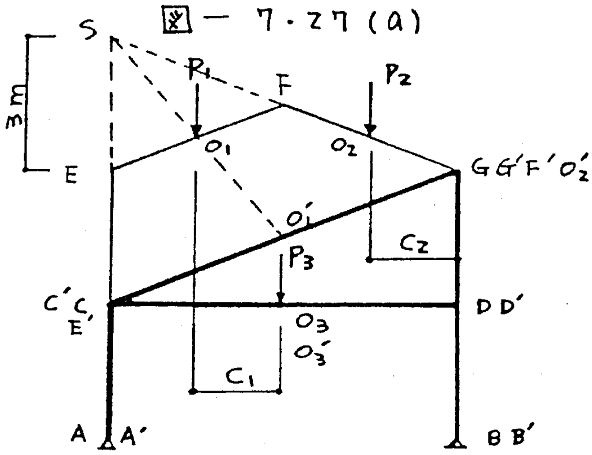
$-7.549 - V_B + 48.412 = 0 \qquad \therefore V_B = 40.863\,t$

（例題 7・17）

左図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



図−7・27(a)



$R_{CE} = 1$

図−7・27(b)

（解）

独立変形部材の数

$n = 7 - 2 \times 2 = 3$ 個

A−C，C−E，D−G を独立変形部材とする。

合力

$P_1 = P_2 = 0.3 \times 4 = 1.2\,t$

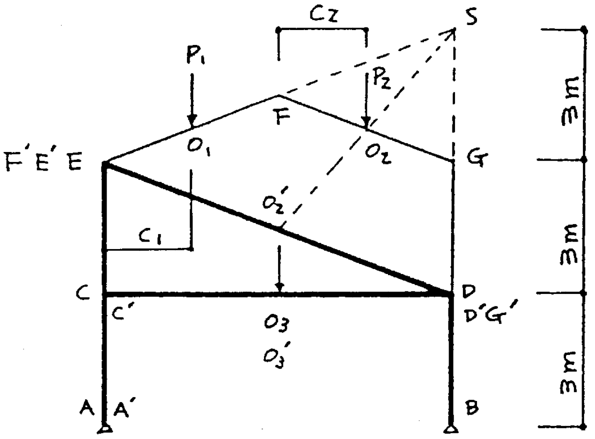
$P_3 = 0.6 \times 8 = 4.8\,t$

（Case−1）　$R_{CE} = 1$ の時

$C_1 = C_2 = 2\,m \qquad C_3 = 0$

$R_{CE} = 1$

$$\left[\begin{aligned} R_{EF} &= 1 - \frac{E'F'}{EF} = 1 - \frac{SE'}{SE} = 1 - \frac{6}{3} = -1 \\ R_{FG} &= 1 - \frac{F'G'}{FG} = 1 \end{aligned}\right.$$



$R_{DG} = 1$

図－7・27(C)

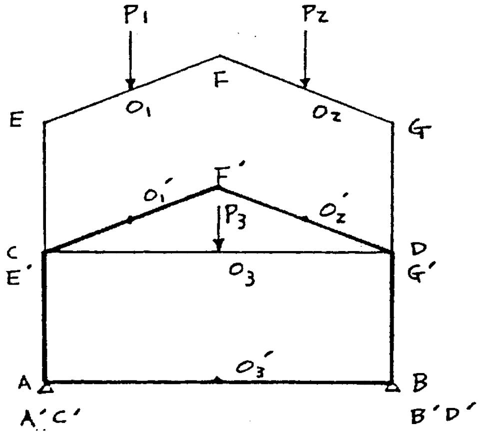
(Case－2)　$R_{DG} = 1$ の時

$C_1 = C_2 = 2\,m$　　$C_3 = 0$

$R_{DG} = 1$

$$R_{FG} = 1 - \frac{F'G'}{FG} = 1 - \frac{SG'}{SG} = 1 - \frac{6}{3} = -1$$

$$R_{EF} = 1 - \frac{E'F'}{EF} = 1$$



$R_{AC} = 1$

図－7・27 (d)

(Case－3)　$R_{AC} = 1$ の時

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$

$R_{AC} = 1$

$R_{BD} = 1$

部材角相互の関係

	Case－1 $R_{CE}=1$	Case－2 $R_{DG}=1$	Case－3 $R_{AC}=1$	部　材　角
A－C			1.0	Ψ_{AC}
B－D			1.0	Ψ_{AC}
C－E	1.0			Ψ_{CE}
D－G		1.0		Ψ_{DG}
E－F	－1.0	1.0		$-\Psi_{CE}+\Psi_{DG}$
F－G	1.0	－1.0		$\Psi_{CE}-\Psi_{DG}$

C, M_o, Q_o の計算

E − F , F − G 部材

$$\begin{cases} C_{EF} = C_{FG} = -\dfrac{0.3 \times 4^2}{12} = -0.4\,tm = -C_{FE} = -C_{GF} \\ M_o = \dfrac{0.3 \times 4^2}{8} = 0.6\,tm \\ Q_o = \dfrac{0.3 \times 4}{2} = 0.6\,t \end{cases}$$

C − D 部材

$$\begin{cases} C_{CD} = -\dfrac{0.6 \times 8^2}{12} = -3.2\,tm \\ M_o = -\dfrac{0.6 \times 8^2}{8} = 4.8\,tm \\ Q_o = \dfrac{0.6 \times 8}{2} = 2.4\,t \end{cases}$$

材端モーメント式

$$M_{AC} = 0$$
$$M_{BD} = 0$$
$$M_{CA} = 1.0\,(1.5\varphi_C + 0.5\,\psi_{AC}) = 1.5\,\varphi_C + 0.5\,\psi_{AC}$$
$$M_{CD} = 0.375\,(2\varphi_C + \varphi_D) - 3.2 = 0.75\,\varphi_C + 0.375\,\varphi_D - 3.2$$
$$M_{CE} = 0.472\,(2\varphi_C + \varphi_E + \psi_{CE}) = 0.944\,\varphi_C + 0.472\,\varphi_E + 0.472\,\psi_{CE}$$
$$M_{DB} = 1.0\,(1.5\,\varphi_D + 0.5\,\psi_{AC}) = 1.5\,\varphi_D + 0.5\,\psi_{AC}$$
$$M_{DC} = 0.375\,(2\varphi_D + \varphi_C) + 3.2 = 0.375\,\varphi_C + 0.75\,\varphi_D + 3.2$$
$$M_{DG} = 0.472\,(2\varphi_D + \varphi_G + \psi_{DG}) = 0.944\,\varphi_D + 0.472\,\varphi_G + 0.472\,\psi_{DG}$$
$$M_{EC} = 0.472\,(2\varphi_E + \varphi_C + \psi_{CE}) = 0.472\,\varphi_C + 0.944\,\varphi_E + 0.472\,\psi_{CE}$$
$$M_{EF} = 0.331\,(2\varphi_E + \varphi_F - \psi_{CE} + \psi_{DG}) - 0.4 = 0.662\,\varphi_E + 0.331\,\varphi_F - 0.331\,\psi_{CE} + 0.331\,\psi_{DG} - 0.4$$
$$M_{FE} = 0.331\,(2\varphi_F + \varphi_E - \psi_{CE} + \psi_{DG}) + 0.4 = 0.331\,\varphi_E + 0.662\,\varphi_F - 0.331\,\psi_{CE} + 0.331\,\psi_{DG} + 0.4$$
$$M_{FG} = 0.331\,(2\varphi_F + \varphi_G + \psi_{CE} - \psi_{DG}) - 0.4 = 0.662\,\varphi_F + 0.331\,\varphi_G + 0.331\,\psi_{CE} - 0.331\,\psi_{DG} - 0.4$$
$$M_{GD} = 0.472\,(2\varphi_G + \varphi_D + \psi_{DG}) = 0.472\,\varphi_D + 0.944\,\varphi_G + 0.472\,\psi_{DG}$$
$$M_{GF} = 0.331\,(2\varphi_G + \varphi_F + \psi_{CE} - \psi_{DG}) + 0.4 = 0.331\,\varphi_F + 0.662\,\varphi_G + 0.331\,\psi_{CE} - 0.331\,\psi_{DG} + 0.4$$

節点方程式

$\Sigma M_C = 0$　　　$M_{CA} + M_{CD} + M_{CE} = 0$

$$3.194\,\varphi_C + 0.375\,\varphi_D + 0.472\,\varphi_E + 0.5\,\psi_{AC} + 0.472\,\psi_{CE} = 3.2 \quad \text{-----} \quad (1)$$

$\Sigma M_D = 0 \qquad M_{DB} + M_{DC} + M_{DG} = 0$

$0.375\varphi_C + 3.194\varphi_D + 0.472\varphi_G + 0.5\psi_{AC} + 0.472\psi_{DG} = -3.2$ ------ (2)

$\Sigma M_E = 0 \qquad M_{EC} + M_{EF} = 0$

$0.472\varphi_C + 1.606\varphi_E + 0.331\varphi_F + 0.141\psi_{CE} + 0.331\psi_{DG} = 0.4$ ---- (3)

$\Sigma M_F = 0 \qquad M_{FE} + M_{FG} = 0$

$0.331\varphi_E + 1.324\varphi_F + 0.331\varphi_G = 0$ ------- (4)

$\Sigma M_G = 0 \qquad M_{GF} + M_{GD} = 0$

$0.472\varphi_D + 0.331\varphi_F + 1.606\varphi_G + 0.331\psi_{CE} + 0.141\psi_{DG} = -0.4$ ---- (5)

力のつり合い式

(Case－1)

$\Sigma P\cdot C = P_1\cdot C_1 + P_2\cdot C_2 = -1.2\times 2 - 1.2\times 2 = -4.8$

$(M_{CE} + M_{EC})\times 1 + (M_{EF} + M_{FE})\times(-1) + (M_{FG} + M_{GF})\times 1 - 4.8 = 0$
$1.416\varphi_C + 0.423\varphi_E + 0.993\varphi_G + 2.268\psi_{CE} - 1.324\psi_{DG} = 4.8$ ------- (6)

(Case－2)

$\Sigma P\cdot C = P_1\cdot C_1 + P_2\cdot C_2 = 1.2\times 2 + 1.2\times 2 + 4.8 = 0$

$(M_{DG} + M_{GD})\times 1 + (M_{FG} + M_{GF})\times(-1) + (M_{EF} + M_{FE}) + 4.8 = 0$
$1.416\varphi_D + 0.993\varphi_E + 0.423\varphi_G - 1.324\psi_{CE} + 2.268\psi_{DG} = -4.8$
------- (7)

(Case－3)

$\Sigma P\cdot C = 0$

$(M_{AC} + M_{CA})\times 1 + (M_{BD} + M_{DB})\times 1 = 0$
$1.5\varphi_C + 1.5\varphi_D + \psi_{AC} = 0$
------ (8)

	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G	ψ_{AC}	ψ_{CE}	ψ_{DG}	右辺
$\Sigma M_C=0$	3.194	0.375	0.472			0.5	0.472		3.2
$\Sigma M_D=0$	0.375	3.194			0.472	0.5		0.472	-3.2
$\Sigma M_E=0$	0.472		1.606	0.331			0.141	0.331	0.4
$\Sigma M_F=0$			0.331	1.324	0.331				0
$\Sigma M_G=0$		0.472		0.331	1.606		0.331	0.141	-0.4
Case-1	1.416		0.423		0.993		2.268	-1.324	4.8
Case-2		1.416	0.993		0.423		-1.324	2.268	-4.8
Case-3	1.5	1.5				1.0			0

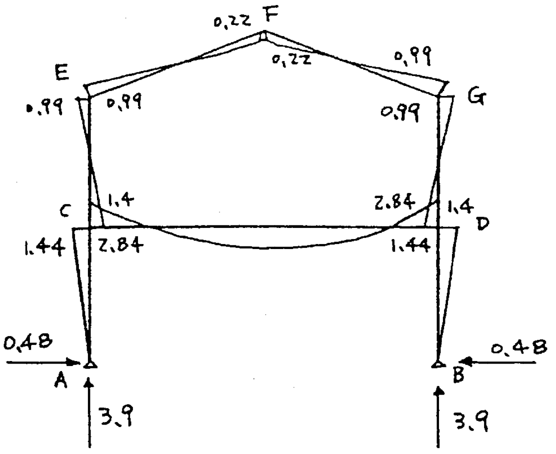
連立に解いて

$\varphi_C = 0.959$ ， $\varphi_D = -0.959$ ， $\varphi_E = 0.082$ ， $\varphi_F = 0$

$\varphi_G = -0.082$ ， $\psi_{AC} = 0$ ， $\psi_{CE} = 0.971$ ， $\psi_{DG} = -0.971$

材端モーメント式に代入する。

$M_{AC} = 0$ (tm)
$M_{BD} = 0$
$M_{CA} = 1.5 \times 0.959 = 1.44$
$M_{CD} = 0.75 \times 0.959 - 0.375 \times 0.959 - 3.2 = -2.84$
$M_{CE} = 0.944 \times 0.959 + 0.472 \times 0.082 + 0.472 \times 0.971 = 1.4$
$M_{DB} = -1.5 \times 0.959 = -1.44$
$M_{DC} = 0.375 \times 0.959 - 0.75 \times 0.959 + 3.2 = 2.84$
$M_{DG} = -0.944 \times 0.959 - 0.472 \times 0.082 - 0.472 \times 0.971 = -1.4$
$M_{EC} = 0.472 \times 0.959 + 0.944 \times 0.082 + 0.472 \times 0.971 = 0.99$
$M_{EF} = 0.662 \times 0.082 - 0.331 \times 0.971 - 0.331 \times 0.971 - 0.4 = -0.99$
$M_{FE} = 0.331 \times 0.082 - 0.331 \times 0.971 - 0.331 \times 0.971 + 0.4 = -0.22$
$M_{FG} = -0.331 \times 0.082 + 0.331 \times 0.971 + 0.331 \times 0.971 - 0.4 = 0.22$
$M_{GD} = -0.472 \times 0.959 - 0.944 \times 0.082 - 0.472 \times 0.971 = -0.99$
$M_{GF} = -0.662 \times 0.082 + 0.331 \times 0.971 + 0.331 \times 0.971 + 0.4 = 0.99$



M－D

図－7・27（e）

反力の計算

C点のつり合い（C－A）

$-3H_A = -1.44$

$H_A = 0.48$ t （右）

D点のつり合い（D－B）

$3H_B = 1.44$

$H_B = 0.48$ t （左）

A点のつり合い

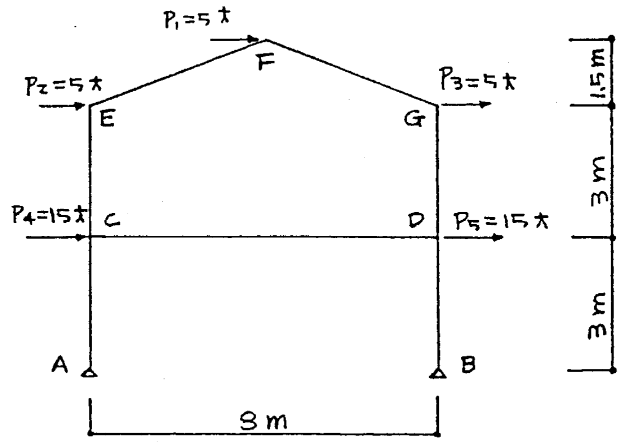
$1.2\times4+1.2\times6+4.8\times4-8V_B=0$

$V_B = 3.9$ t （上）

$\Sigma Y=0$ より

$V_A = 3.9$ t （上）

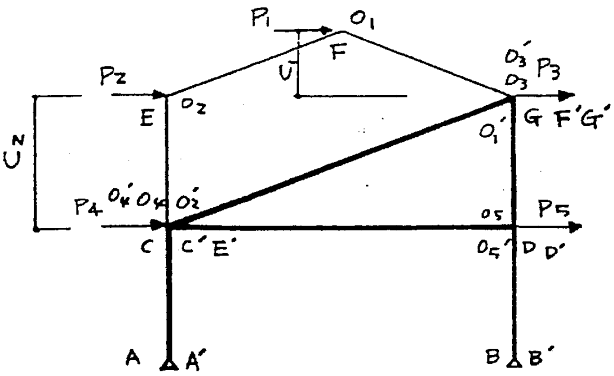
（例題7・18）



図－7・28（a）

左図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

（解）　部材角の関係は例題7・17に準ずる。直角変位図よりCを求める。



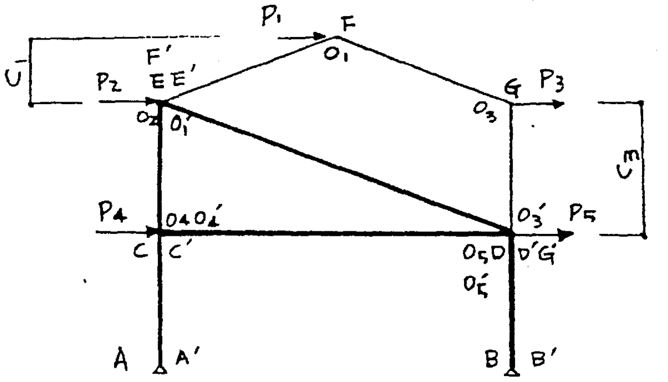
$R_{CE} = 1$

図－7・28（b）

（Case－1）　$R_{CE} = 1$ の時

$C_1 = 1.5$ m

$C_2 = 3.0$ m



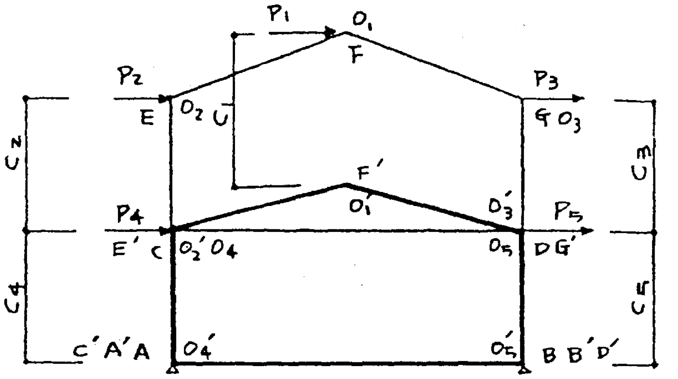
$R_{DG}=1$

図－2・28 (c)

(Case－2)　$R_{DG}=1$ の時

$C_1 = 1.5\ m$

$C_3 = 3\ m$



$R_{AC}=1$

図－2・28 (d)

(Case－3)　$R_{AC}=1$ の時

$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 3\ m$

部材角相互の関係

	Case－1 $R_{CE}=1$	Case－2 $R_{DG}=1$	Case－3 $R_{AC}=1$	部　材　角
A － C			1.0	Ψ_{AC}
B － D			1.0	Ψ_{AC}
C － E	1.0			Ψ_{CE}
D － G		1.0		Ψ_{DG}
E － F	－1.0	1.0		$-\Psi_{CE}+\Psi_{DG}$
F － G	1.0	－1.0		$\Psi_{CE}-\Psi_{DG}$

材端モーメント式

$M_{AC} = 0$

$M_{BD} = 0$

$M_{CA} = 1.5\varphi_C + 0.5\Psi_{AC}$

$M_{CD} = 0.75\varphi_C + 0.375\varphi_D$

$M_{CE} = 0.944\varphi_C + 0.472\varphi_E + 0.472\Psi_{CE}$

$M_{DB} = 1.5\varphi_D + 0.5\Psi_{AC}$

$M_{DC} = 0.375\varphi_C + 0.75\varphi_D$

$M_{DG} = 0.944\varphi_D + 0.472\varphi_G + 0.472\Psi_{DG}$

$M_{EC} = 0.472\varphi_C + 0.944\varphi_E + 0.472\Psi_{CE}$

$M_{EF} = 0.662\varphi_E + 0.331\varphi_F - 0.331\Psi_{CE} + 0.331\Psi_{DG}$

$M_{FE} = 0.331\varphi_E + 0.662\varphi_F - 0.331\Psi_{CE} + 0.331\Psi_{DG}$

$M_{FG} = 0.662\varphi_F + 0.331\varphi_G + 0.331\Psi_{CE} - 0.331\Psi_{DG}$

$M_{GD} = 0.472\varphi_D + 0.944\varphi_G + 0.472\Psi_{DG}$

$M_{GF} = 0.331\varphi_F + 0.662\varphi_G + 0.331\Psi_{CE} - 0.331\Psi_{DG}$

節点方程式

$\Sigma M_C = 0$ $\qquad M_{CA} + M_{CD} + M_{CE} = 0$

$3.194\varphi_C + 0.375\varphi_D + 0.472\varphi_E + 0.5\Psi_{AC} + 0.472\Psi_{CE} = 0$ ----- (1)

$\Sigma M_D = 0$ $\qquad M_{DB} + M_{DC} + M_{DG} = 0$

$0.375\varphi_C + 3.194\varphi_D + 0.472\varphi_G + 0.5\Psi_{AC} + 0.472\Psi_{DG} = 0$ ----- (2)

$\Sigma M_E = 0$ $\qquad M_{EC} + M_{EF} = 0$

$0.472\varphi_C + 1.606\varphi_E + 0.331\varphi_F + 0.141\Psi_{CE} + 0.331\Psi_{DG} = 0$ ---- (3)

$\Sigma M_F = 0$ $\qquad M_{FE} + M_{FG} = 0$

$0.331\varphi_E + 1.324\varphi_F + 0.331\varphi_G = 0$ ------ (4)

$\Sigma M_G = 0$ $\qquad M_{GF} + M_{GD} = 0$

$0.472\varphi_D + 0.331\varphi_F + 1.606\varphi_G + 0.331\Psi_{CE} + 0.141\Psi_{DG} = 0$ --- (5)

力のつり合い式

(Case - 1)

$$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 = 5 \times 1{,}5 + 5 \times 3 = 22{,}5$$

$$(M_{CE} + M_{EC}) \times 1 + (M_{EF} + M_{FE}) \times (-1) + (M_{FG} + M_{GF}) \times 1 + 22{,}5 = 0$$

$$1{,}416\,\varphi_C + 0{,}423\,\varphi_E + 0{,}993\,\varphi_G + 2{,}268\,\Psi_{CE} - 1{,}324\,\Psi_{DG} = -22{,}5 \quad \text{------ (6)}$$

(Case - 2)

$$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 = 5 \times 1{,}5 + 5 \times 3 = 22{,}5$$

$$(M_{DG} + M_{GD}) \times 1 + (M_{FG} + M_{GF}) \times (-1) + (M_{EF} + M_{FE}) \times 1 + 22{,}5 = 0$$

$$1{,}416\,\varphi_D + 0{,}993\,\varphi_E + 0{,}423\,\varphi_G - 1{,}324\,\Psi_{CE} + 2{,}268\,\Psi_{DG} = -22{,}5 \quad \text{------ (7)}$$

(Case - 3)

$$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 + P_3 \cdot C_3 + P_4 \cdot C_4 + P_5 \cdot C_5$$
$$= 5 \times 3 + 5 \times 3 + 5 \times 3 + 15 \times 3 + 15 \times 3 = 135$$

$$(M_{AC} + M_{CA}) \times 1 + (M_{BD} + M_{DB}) \times 1 = 0$$

$$1{,}5\,\varphi_C + 1{,}5\,\varphi_D + \Psi_{AC} = -135 \quad \text{------- (8)}$$

	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G	Ψ_{AC}	Ψ_{CE}	Ψ_{DG}	右辺
$\Sigma M_C = 0$	3,194	0,375	0,472			0,5	0,472		0
$\Sigma M_D = 0$	0,375	3,194			0,472	0,5		0,472	0
$\Sigma M_E = 0$	0,472		1,606	0,331			0,141	0,331	0
$\Sigma M_F = 0$			0,331	1,324	0,331				0
$\Sigma M_G = 0$		0,472		0,331	1,606		0,331	0,141	
Case-1	1,416		0,423		0,993		2,268	-1,324	-22,5
Case-2		1,416	0,993		0,423		-1,324	2,268	-22,5
Case-3	1,5	1,5				1,0			-135

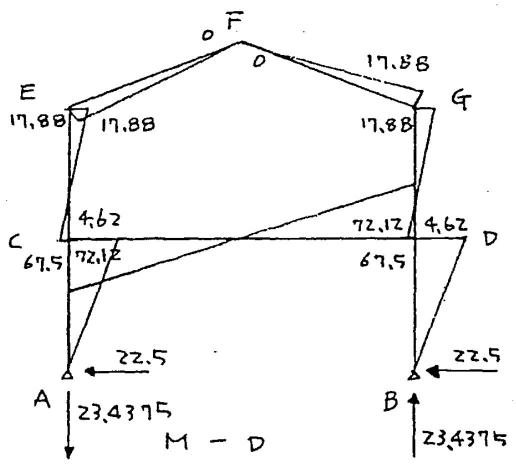
連立に解いて

$\varphi_C = 64.106$,　$\varphi_D = 64.106$,　$\varphi_E = 36.012$,　$\varphi_F = -18.006$

$\varphi_G = 36.012$,　$\psi_{AC} = -327.319$, $\psi_{CE} = -174.013$, $\psi_{DG} = -174.013$

材端モーメント式に代入する。

$M_{AC} = 0$　(tm)
$M_{BD} = 0$
$M_{CA} = 1.5 \times 64.106 - 0.5 \times 327.319 = -67.5$
$M_{CD} = 0.75 \times 64.106 + 0.375 \times 64.106 = 72.12$
$M_{CE} = 0.994 \times 64.106 + 0.472 \times 36.012 - 0.472 \times 174.013 = -4.62$
$M_{DB} = 1.5 \times 64.106 - 0.5 \times 327.319 = -67.50$
$M_{DC} = 0.375 \times 64.106 + 0.75 \times 64.106 = 72.12$
$M_{DG} = 0.944 \times 64.106 + 0.472 \times 36.012 - 0.472 \times 174.013 = -4.62$
$M_{EC} = 0.472 \times 64.106 + 0.944 \times 36.012 - 0.472 \times 174.013 = -17.88$
$M_{EF} = 0.662 \times 36.012 - 0.331 \times 18.006 + 0.331 \times 174.013 - 0.331 \times 174.013 = 17.88$
$M_{FE} = 0.331 \times 36.012 - 0.662 \times 18.006 + 0.331 \times 174.013 - 0.331 \times 174.013 = 0$
$M_{FG} = -0.662 \times 18.006 + 0.331 \times 36.012 - 0.331 \times 174.013 + 0.331 \times 174.013 = 0$
$M_{GD} = 0.472 \times 64.106 + 0.944 \times 36.012 - 0.472 \times 174.013 = -17.88$
$M_{GF} = -0.331 \times 18.006 + 0.662 \times 36.012 - 0.331 \times 174.013 + 0.331 \times 174.013 = 17.88$



図－2・28(e)

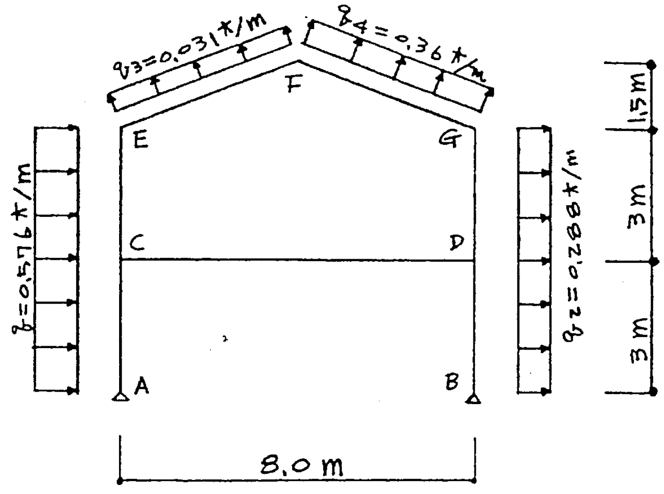
反力の計算

C点のつり合い (C－A)
$3H_A = 67.5$
$H_A = 22.5\,t = H_B$　(左)

A点のつり合いより
$15 \times 3 + 15 \times 3 + 5 \times 6 + 5 \times 6 + 5 \times 7.5$
$- 8V_B = 0$
$V_B = 23.4375\,t$　(上)

$\Sigma Y = 0$ より
$-V_A + 23.4375 = 0$
$V_A = 23.4375\,t$　(下)

(例題 7・19)

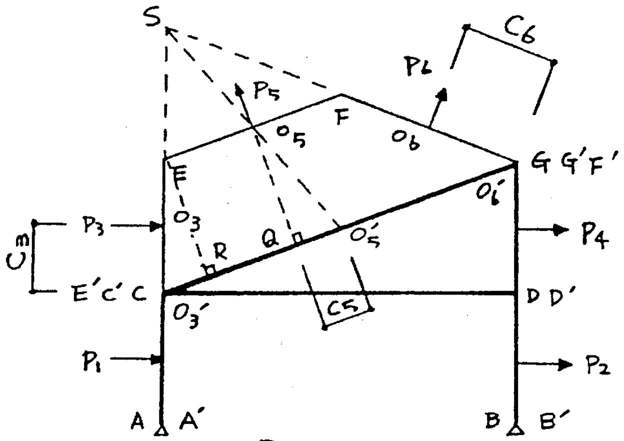


図－2・29 (a)

左図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

(解) 部材角の関係は例題7・17に準ずる。
従って直角変位図よりCを求める。

$P_1 = 0.576 \times 3 = 1.728$ t
$P_2 = 0.288 \times 3 = 0.864$ t
$P_3 = 0.576 \times 3 = 1.728$ t
$P_4 = 0.288 \times 3 = 0.864$ t
$P_5 = 0.031 \times 4.272 = 0.132$ t
$P_6 = 0.36 \times 4.272 = 1.538$ t



$R_{CE}=1$
図－2・29 (b)

(Case－1) $R_{CE} = 1$ の時

C_5 を求める。

$C_5 = QO_5' = E'F' - E'R - RQ - \frac{1}{2}E'F'$

$E'F' = 8.544$

$\triangle EE'R \backsim \triangle E'F'D$

$EE' : E'R = E'F' : F'D$

$3 : E'R = 8.544 : 3$

$\therefore E'R = 1.053$ m

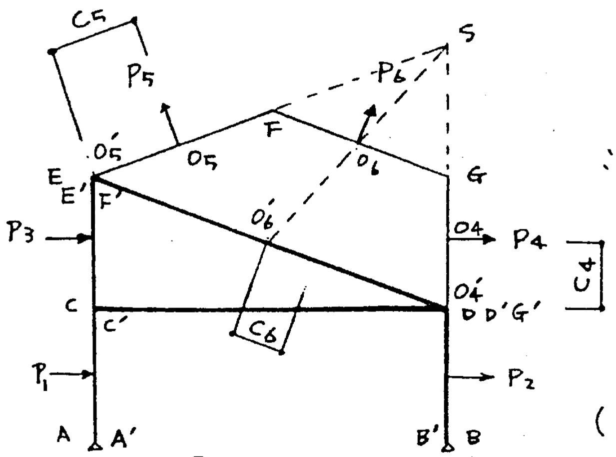
$EF = 4.272$ m

$RQ = EO_5 = \frac{1}{2}EF = 2.136$ m

$\therefore C_5 = E'F' - E'R - RQ - \frac{1}{2}E'F'$
$= 8.544 - 1.053 - 2.136 - \frac{1}{2}8.544$
$= 1.083$ m

$C_3 = 1.5$ m

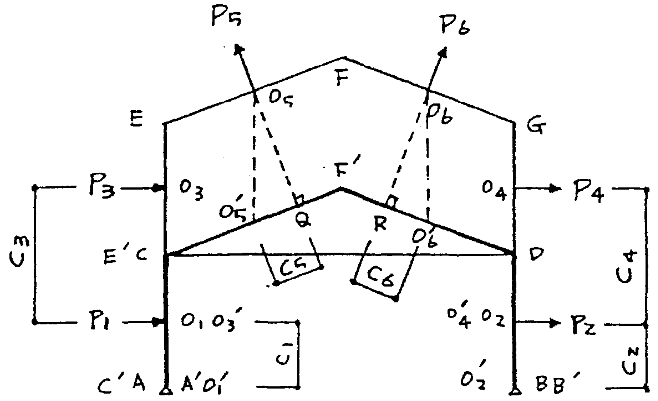
$C_6 = FG/2 = 2.136$ m



$R_{DG}=1$
図－2・29 (c)

(Case－2) $R_{DG}=1$ の時

$C_4 = 1.5$ m
$C_5 = 2.136$ m
$C_6 = 1.083$ m



$R_{AC}=1$
図－7・29（d）

（Case－3） $R_{AC}=1$ の時

$C_1=C_2=1.5\ m$
$C_3=C_4=3\ m$

C_5 と C_6 は Case－1 の E'R と同じだから

$C_5=C_6=1.053\ m$

部材角相互の関係

	Case－1 $R_{CE}=1$	Case－2 $R_{DG}=1$	Case－3 $R_{AC}=1$	部　材　角
A－C			1.0	Ψ_{AC}
B－D			1.0	Ψ_{AC}
C－E	1.0			Ψ_{CE}
D－G		1.0		Ψ_{DG}
E－F	−1.0	1.0		$-\Psi_{CE}+\Psi_{DG}$
F－G	1.0	−1.0		$\Psi_{CE}-\Psi_{DG}$

C, M_0, Q_0 の計算

A－C部材

$$H_{CA}=1.5\,C_{CA}=1.5\times\frac{0.576\times3^2}{12}=0.648\,tm$$
$$M_0=\frac{0.576\times3^2}{8}=0.648\,tm$$
$$Q_0=\frac{0.576\times3}{2}=0.864\,t$$

B－D部材

$$H_{DB}=1.5\,C_{DB}=1.5\times\frac{0.288\times3^2}{12}=0.324\,tm$$
$$M_0=\frac{0.288\times3^2}{8}=0.324\,tm$$
$$Q_0=\frac{0.288\times3}{2}=0.432\,t$$

C − E 部材

$$
\left[
\begin{aligned}
C_{CE} &= -\frac{0.576 \times 3^2}{12} = -0.432\,\mathrm{tm} = -C_{EC} \\
M_0 &= \frac{0.576 \times 3^2}{8} = 0.648\,\mathrm{tm} \\
Q_0 &= \frac{0.576 \times 3}{2} = 0.864\,\mathrm{t}
\end{aligned}
\right.
$$

D − G 部材

$$
\left[
\begin{aligned}
C_{DG} &= -\frac{0.288 \times 3^2}{12} = -0.216\,\mathrm{tm} = -C_{DG} \\
M_0 &= \frac{0.288 \times 3^2}{8} = 0.324\,\mathrm{tm} \\
Q_0 &= \frac{0.288 \times 3}{2} = 0.432\,\mathrm{t}
\end{aligned}
\right.
$$

E − F 部材

$$
\left[
\begin{aligned}
C_{EF} &= \frac{0.031 \times 4.272^2}{12} = 0.047\,\mathrm{tm} = -C_{FE} \\
M_0 &= \frac{0.031 \times 4.272^2}{8} = 0.071\,\mathrm{tm} \\
Q_0 &= \frac{0.031 \times 4.272}{2} = 0.066\,\mathrm{t}
\end{aligned}
\right.
$$

F − G 部材

$$
\left[
\begin{aligned}
C_{FG} &= \frac{0.36 \times 4.272^2}{12} = 0.547\,\mathrm{tm} = -C_{GF} \\
M_0 &= \frac{0.36 \times 4.272^2}{8} = 0.821\,\mathrm{tm} \\
Q_0 &= \frac{0.36 \times 4.272}{2} = 0.769\,\mathrm{t}
\end{aligned}
\right.
$$

材端モーメント式

$$M_{AC} = 0$$

$$M_{BD} = 0$$

$$M_{CA} = 1.5\varphi_C + 0.5\psi_{AC} + 0.648$$

$$M_{CD} = 0.75\varphi_C + 0.375\varphi_D$$

$$M_{CE} = 0.944\varphi_C + 0.472\varphi_E + 0.472\psi_{CE} - 0.432$$

$$M_{DB} = 1.5\varphi_D + 0.5\psi_{AC} + 0.324$$

$$M_{DC} = 0.375\varphi_C + 0.75\varphi_D$$

$$M_{DG} = 0.944\varphi_D + 0.472\varphi_G + 0.472\psi_{DG} - 0.216$$

$$M_{EC} = 0.472\varphi_C + 0.944\varphi_E + 0.472\psi_{CE} + 0.432$$

$$M_{EF} = 0.662\varphi_E + 0.331\varphi_F - 0.331\psi_{CE} + 0.331\psi_{DG} + 0.047$$

$$M_{FE} = 0.331\varphi_E + 0.662\varphi_F - 0.331\psi_{CE} + 0.331\psi_{DG} - 0.047$$

$$M_{FG} = 0.662\varphi_F + 0.331\varphi_G + 0.331\psi_{CE} - 0.331\psi_{DG} + 0.547$$

$$M_{GD} = 0.472\varphi_D + 0.944\varphi_G + 0.472\psi_{DG} + 0.216$$

$$M_{GF} = 0.331\varphi_F + 0.662\varphi_G + 0.331\psi_{CE} - 0.331\psi_{DG} - 0.547$$

節点方程式

$\Sigma M_C = 0 \qquad M_{CA} + M_{CD} + M_{CE} = 0$

$$3.194\varphi_C + 0.375\varphi_D + 0.472\varphi_E + 0.5\psi_{AC} + 0.472\psi_{CE} = -0.216 \quad \text{-------} \ (1)$$

$\Sigma M_D = 0 \qquad M_{DB} + M_{DC} + M_{DG} = 0$

$$0.375\varphi_C + 3.194\varphi_D + 0.472\varphi_G + 0.5\psi_{AC} + 0.472\psi_{DG} = -0.108 \quad \text{-------} \ (2)$$

$\Sigma M_E = 0 \qquad M_{EC} + M_{EF} = 0$

$$0.472\varphi_C + 1.606\varphi_E + 0.331\varphi_F + 0.141\psi_{CE} + 0.331\psi_{DG} = -0.479 \quad \text{-------} \ (3)$$

$\Sigma M_F = 0 \qquad M_{FE} + M_{FG} = 0$

$$0.331\varphi_E + 1.324\varphi_F + 0.331\varphi_G = -0.5 \quad \text{------} \ (4)$$

$\Sigma M_G = 0 \qquad M_{GF} + M_{GD} = 0$

$$0.472\varphi_D + 0.331\varphi_F + 1.606\varphi_G + 0.331\psi_{CE} + 0.141\psi_{DG} = 0.331 \quad \text{-------} \ (5)$$

力のつり合い式

(Case－1)

$$\Sigma P\cdot C = P_3\cdot C_3 + P_5\cdot C_5 + P_6\cdot C_6 = 1.728\times1.5 + 0.132\times1.083 + 1.538\times2.136 = 6.02$$

$$(M_{CE} + M_{EC})\times1 + (M_{EF} + M_{FE})\times(-1) + (M_{FG} + M_{GF}) + 6.02 = 0$$

$$1.416\varphi_C + 0.423\varphi_E + 0.993\varphi_G + 2.268\psi_{CE} - 1.324\psi_{DG} = -6.02 \quad \text{-------} \ (6)$$

(Case－2)

$$\Sigma P\cdot C = P_4\cdot C_4 + P_5 C_5 + P_6 C_6 = 0.864\times1.5 - 0.132\times2.136 - 1.538\times1.083 = -0.652$$

$$(M_{DG} + M_{GD})\times1 - (M_{FG} + M_{GF})\times(-1) + (M_{EF} + M_{FE}) - 0.652 = 0$$

$$1.416\varphi_D + 0.993\varphi_E + 0.423\varphi_G - 1.324\psi_{CE} + 2.268\psi_{DG} = 0.652 \quad \text{-------} \ (7)$$

(Case－3)

$\Sigma P \cdot C = P_1 C_1 + P_2 C_2 + P_3 C_3 + P_4 C_4 + P_5 C_5 + P_6 C_6$

$= 1{,}728 \times 1{,}5 + 0{,}864 \times 1{,}5 + 1{,}728 \times 3 + 0{,}864 \times 3 - 0{,}132 \times 1{,}053 + 1{,}538 \times 1{,}05$

$= 13{,}145$

$(M_{AC} + M_{CA}) \times 1 + (M_{BD} + M_{DB}) \times 1 + 13{,}145 = 0$

$1{,}5\,\varphi_C + 1{,}5\,\varphi_D + \Psi_{AC} = -14{,}117$ ------ (8)

	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G	Ψ_{AC}	Ψ_{CE}	Ψ_{DG}	右辺
$\Sigma M_C=0$	3,194	0,375	0,472			0,5	0,472		−0,216
$\Sigma M_D=0$	0,375	3,194			0,472	0,5		0,472	−0,108
$\Sigma M_E=0$	0,472		1,606	0,331			0,141	0,331	−0,479
$\Sigma M_F=0$			0,331	1,324	0,331				−0,5
$\Sigma M_G=0$		0,472		0,331	1,606		0,331	0,141	0,331
Case−1	1,416		0,423		0,993		2,268	−1,324	−6,02
Case−2		1,416	0,993		0,423		−1,324	2,268	0,652
Case−3	1,5	1,5				1,0			−14,117

連立に解いて

$\varphi_C = 7{,}001$, $\varphi_D = 6{,}521$, $\varphi_E = 3{,}628$, $\varphi_F = -2{,}418$

$\varphi_G = 4{,}532$, $\Psi_{AC} = -34{,}399$, $\Psi_{CE} = -20{,}199$, $\Psi_{DG} = -18{,}009$

材端モーメント式に代入する

$M_{AC} = 0$ (tm)

$M_{BD} = 0$

$M_{CA} = 1{,}5 \times 7{,}001 - 0{,}5 \times 34{,}399 + 0{,}648 = -6{,}05$

$M_{CD} = 0{,}75 \times 7{,}001 + 0{,}375 \times 6{,}521 = 7{,}7$

$M_{CE} = 0{,}944 \times 7{,}001 + 0{,}472 \times 3{,}628 - 0{,}472 \times 20{,}199 - 0{,}432 = -1{,}65$

$M_{DB} = 1{,}5 \times 6{,}521 - 0{,}5 \times 34{,}399 + 0{,}324 = -7{,}09$

$M_{DC} = 0{,}375 \times 7{,}001 + 0{,}75 \times 6{,}521 = 7{,}51$

$M_{DG} = 0{,}944 \times 6{,}521 + 0{,}472 \times 4{,}532 - 0{,}472 \times 18{,}009 - 0{,}216 = -0{,}42$

$M_{EC} = 0{,}472 \times 7{,}001 + 0{,}944 \times 3{,}628 - 0{,}472 \times 20{,}199 + 0{,}432 = -2{,}37$

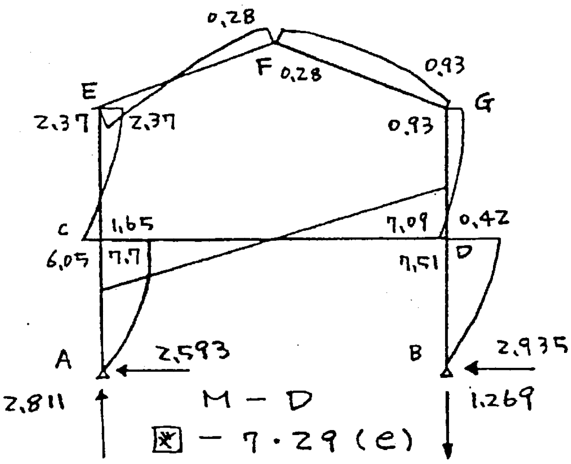
$M_{EF} = 0{,}662 \times 3{,}628 - 0{,}331 \times 2{,}418 + 0{,}331 \times 20{,}199 - 0{,}331 \times 18{,}009 + 0{,}047 = 2{,}37$

$$M_{FE} = 0.331\times3.628 - 0.662\times2.418 + 0.331\times20.199 - 0.331\times18.009 - 0.047$$
$$= 0.28$$

$$M_{FG} = -0.662\times2.418 + 0.331\times4.532 - 0.331\times20.199 + 0.331\times18.009 + 0.54$$
$$= -0.28$$

$$M_{GD} = 0.472\times6.521 + 0.944\times4.532 - 0.472\times18.009 + 0.216 = -0.93$$

$$M_{GF} = -0.331\times2.418 + 0.662\times4.532 - 0.331\times20.199 + 0.331\times18.009 - 0.547$$
$$= 0.93$$



M − D

図−7・29 (e)

反力の計算

C点のつり合い (C − A)

$3H_A - 1.728\times1.5 = 6.05$　　∴ $H_A = 2.593$ t　(左)

D点のつり合い (D − B)

$3H_B - 0.864\times1.5 = 7.51$　　∴ $H_D = 2.935$ t　(左)

A点のつり合い

$$-8V_B + 1.728\times1.5 + 0.864\times1.5 + 1.728\times4.5 + 0.864\times4.5 - 0.132\times4.242$$
$$- 1.538\times3.147 = 0$$

$$-8V_B + 2.592 + 1.296 + 7.776 + 3.888 - 0.56 - 4.84 = 0$$

$V_B = 1.269$ t　(上)

B点のつり合い

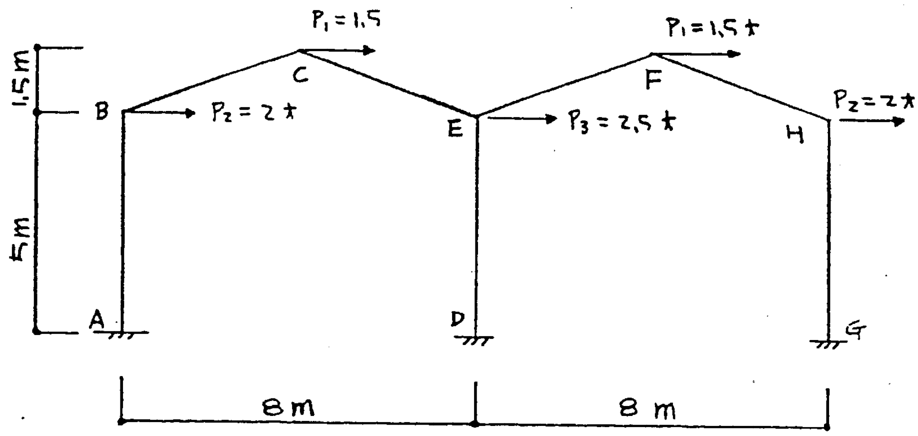
$$-8V_A + 1.728\times1.5 + 0.864\times1.5 + 1.728\times4.5 + 0.864\times4.5 + 0.132\times3.147$$
$$+ 1.538\times4.242 = 0$$

$$-8V_A + 2.592 + 1.296 + 7.776 + 3.888 + 0.415 + 6.254 = 0$$

$V_A = 2.811$ t　(下)

（例題 7・20）

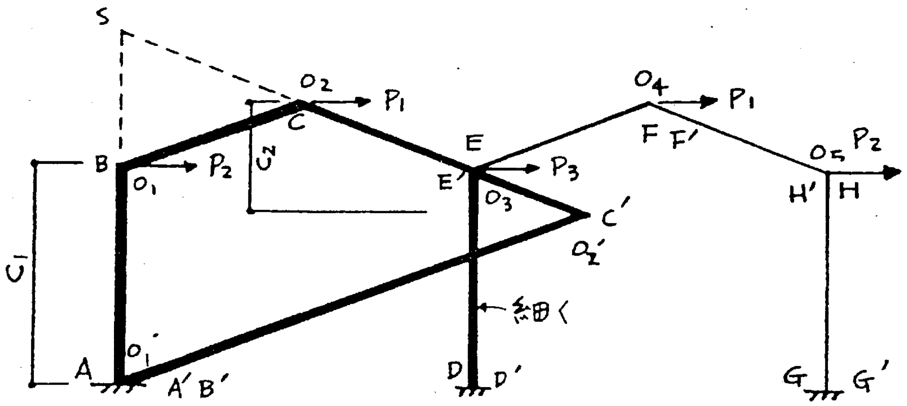
図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



図－7・30（a）

（解）　独立変形部材の数　$n = 7 - 2 \times 2 = 3$ 個

A－B，D－E，G－Hを独立部材とする。



$R_{AB} = 1$

図－7・30（b）

（Case－1）

$R_{AB} = 1$ の時

C_2を求める。

$BC = 4.272$ m

$SB : BC = SA : AC'$

$3 : 4.272 = 8 : AC'$

$AC' = 11.392$ m

$CC' = AC' - SC$

$= 11.392 - 4.272 = 7.12$ m

$4.272 : 1.5 = 7.12 : C_2$

$C_2 = 2.5$ m

$C_1 = 5$ m

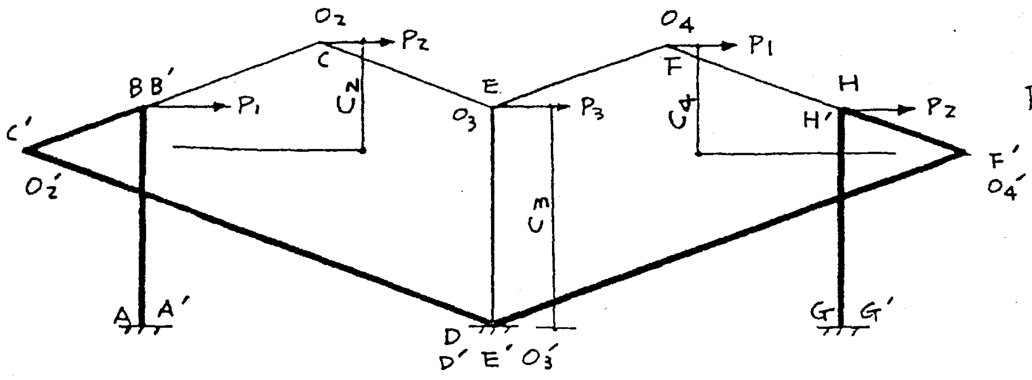
$R_{AB} = 1$　の時

$$\left[\begin{array}{l} R_{BC} = 1 - \dfrac{B'C'}{BC} = 1 - \dfrac{SA}{SB} = -1.667 \\ R_{CE} = 1 + \dfrac{C'E'}{CE} = 1 + \dfrac{CC' - 4.272}{4.272} = 1 + \dfrac{2.848}{4.272} = 1.667 \end{array}\right.$$

(Case－2)

$R_{DE}=1$ の時

$C_2=C_4=2.5\,m$



$R_{DE}=1$

図－7・30 (c)

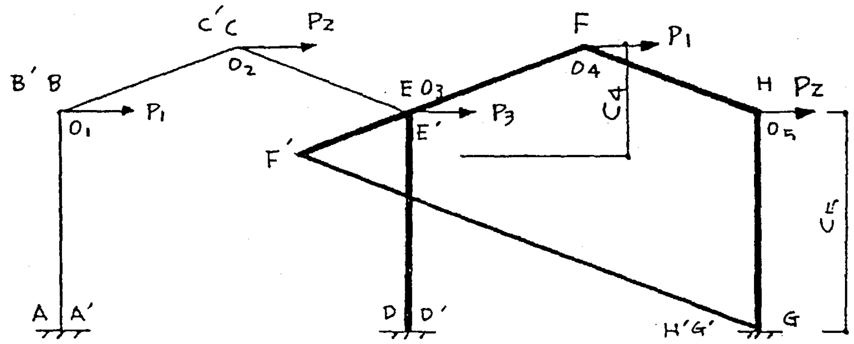
$R_{DE}=1$ の時
$R_{BC}=1.667$
$R_{CE}=-1.667$
$R_{EF}=-1.667$
$R_{FH}=1.667$

(Case－3)

$R_{GH}=1$ の時

$C_4=2.5\ m$

$C_5=5\ m$



$R_{GH}=1$

図－7・30 (d)

$R_{GH}=1$ の時
$R_{EF}=1.667$
$R_{FH}=-1.667$

部材角相互の関係

	Case－1 $R_{AB}=1$	Case－2 $R_{DE}=1$	Case－3 $R_{GH}=1$	部材角
A－B	1.0			ψ_{AB}
B－C	－1.667	1.667		$-1.667\psi_{AB}+1.667\psi_{DE}$
C－E	1.667	－1.667		$1.667\psi_{AB}-1.667\psi_{DE}$
D－E		1.0		ψ_{DE}
E－F		－1.667	1.667	$-1.667\psi_{DE}+1.667\psi_{GH}$
F－H		1.667	－1.667	$1.667\psi_{DE}-1.667\psi_{GH}$
G－H			1.0	ψ_{GH}

材端モーメント式

$$M_{AB} = \varphi_B + \psi_{AB}$$
$$M_{BA} = 2\varphi_B + \psi_{AB}$$
$$M_{BC} = 2.34\varphi_B + 1.17\varphi_C - 1.95\psi_{AB} + 1.95\psi_{DE}$$
$$M_{CB} = 1.17\varphi_B + 2.34\varphi_C - 1.95\psi_{AB} + 1.95\psi_{DE}$$
$$M_{CE} = 2.34\varphi_C + 1.17\varphi_E + 1.95\psi_{AB} - 1.95\psi_{DE}$$
$$M_{DE} = \varphi_E + \psi_{DE}$$
$$M_{ED} = 2\varphi_E + \psi_{DE}$$
$$M_{EC} = 1.17\varphi_C + 2.34\varphi_E + 1.95\psi_{AB} - 1.95\psi_{DE}$$
$$M_{EF} = 2.34\varphi_E + 1.17\varphi_F - 1.95\psi_{DE} + 1.95\psi_{GH}$$
$$M_{FE} = 1.17\varphi_E + 2.34\varphi_F - 1.95\psi_{DE} + 1.95\psi_{GH}$$
$$M_{FH} = 2.34\varphi_F + 1.17\varphi_H + 1.95\psi_{DE} - 1.95\psi_{GH}$$
$$M_{GH} = \varphi_H + \psi_{GH}$$
$$M_{HG} = 2\varphi_H + \psi_{GH}$$
$$M_{HF} = 1.17\varphi_F + 2.34\varphi_H + 1.95\psi_{DE} - 1.95\psi_{GH}$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0$ $\qquad M_{BA} + M_{BC} = 0$

$$4.34\varphi_B + 1.17\varphi_C - 0.95\psi_{AB} + 1.95\psi_{DE} = 0 \quad \text{------} \; (1)$$

$\Sigma M_C = 0$ $\qquad M_{CB} + M_{CE} = 0$

$$1.17\varphi_B + 4.68\varphi_C + 1.17\varphi_E = 0 \quad \text{------} \; (2)$$

$\Sigma M_E = 0$ $\qquad M_{ED} + M_{EC} + M_{EF} = 0$

$$1.17\varphi_C + 6.68\varphi_E + 1.17\varphi_F + 1.95\psi_{AB} - 2.9\psi_{DE} + 1.95\psi_{GH} = 0 \quad \text{------} \; (3)$$

$\Sigma M_F = 0$ $\qquad M_{FE} + M_{FH} = 0$

$$1.17\varphi_E + 4.68\varphi_F + 1.17\varphi_H = 0 \quad \text{------} \; (4)$$

$\Sigma M_H = 0$ $\qquad M_{HG} + M_{HF} = 0$

$$1.17\varphi_F + 4.34\varphi_H + 1.95\psi_{DE} - 0.95\psi_{GH} = 0 \quad \text{------} \; (5)$$

力のつり合い式

(Case－1)

$$\Sigma P\cdot C = P_1\cdot C_1 + P_2\cdot C_2 = 2\times 5 + 1.5\times 2.5 = 13.75$$

$$(M_{AB}+M_{BA})\times 1 + (M_{BC}+M_{CB})\times(-1.667) + (M_{CE}+M_{EC})\times 1.667 + 13.75 = 0$$

$$-2.851\varphi_B + 5.851\varphi_E + 15.003\psi_{AB} - 13.003\psi_{DE} = -13.75 \quad \text{------} \quad (6)$$

(Case－2)

$$\Sigma P\cdot C = P_2\cdot C_2 + P_3\cdot C_3 + P_5\cdot C_5 = 1.5\times 2.5 + 2.5\times 5 + 1.5\times 2.5 = 20$$

$$(M_{DE}+M_{ED})\times 1 + (M_{BC}+M_{CB})\times 1.667 + (M_{CE}+M_{EC})\times(-1.667) + (M_{EF}+M_{FE})\times(-1.667) + (M_{FH}+M_{HF})\times 1.667 + 20 = 0$$

$$5.851\varphi_B - 8.702\varphi_E + 5.851\varphi_H - 13.003\psi_{AB} + 28.005\psi_{DE} - 13.003\psi_{GH} = -20 \quad \text{------} \quad (7)$$

(Case－3)

$$\Sigma P\cdot C = P_1\cdot C_4 + P_2\cdot C_5 = 1.5\times 2.5 + 2\times 5 = 13.75$$

$$(M_{GH}+M_{HG})\times 1 + (M_{EF}+M_{FE})\times 1.667 + (M_{FH}+M_{HF})\times(-1.667) + 13.75 = 0$$

$$5.85\varphi_E - 2.851\varphi_H - 13.003\psi_{DE} + 15.003\psi_{GH} = -13.75 \quad \text{------} \quad (8)$$

	φ_B	φ_C	φ_E	φ_F	φ_H	ψ_{AB}	ψ_{DE}	ψ_{GH}	右辺
$\Sigma M_B=0$	4.34	1.17				−0.95	1.95		0
$\Sigma M_C=0$	1.17	4.68	1.17						0
$\Sigma M_E=0$		1.17	6.68	1.17		1.95	−2.9	1.95	0
$\Sigma M_F=0$			1.17	4.68	1.17				0
$\Sigma M_H=0$				1.17	4.34		1.95	−0.95	0
Case－1	−2.851		5.851			15.003	−13.003		−13.75
Case－2	5.851		−8.702		5.851	−13.003	28.005	−13.003	−20
Case－3			5.851		−2.851		−13.003	15.003	−13.75

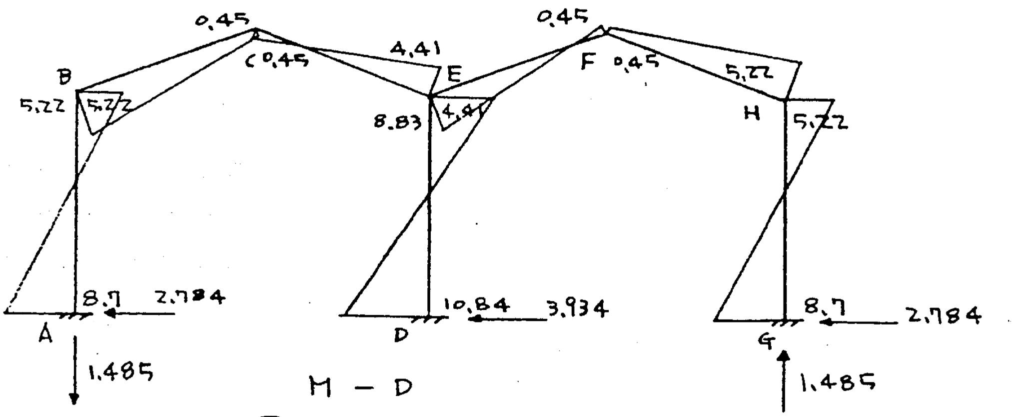
連立に解いて

$\varphi_B = 3.479$, $\varphi_C = -1.373$, $\varphi_E = 2.012$, $\varphi_F = -1.373$

$\varphi_H = 3.479$, $\psi_{AB} = -12.179$, $\psi_{DE} = -12.852$, $\psi_{GH} = -12.179$

材端モーメント式に代入する。

$M_{AB} = 3.479 - 12.179 = -8.7$ (tm)
$M_{BA} = 2 \times 3.479 - 12.179 = -5.22$
$M_{BC} = 2.34 \times 3.479 - 1.17 \times 1.373 + 1.95 \times 12.179 - 1.95 \times 12.852 = 5.22$
$M_{CB} = 1.17 \times 3.479 - 2.34 \times 1.373 + 1.95 \times 12.179 - 1.95 \times 12.852 = -0.45$
$M_{CE} = -2.34 \times 1.373 + 1.17 \times 2.012 - 1.95 \times 12.179 + 1.95 \times 12.852 = 0.45$
$M_{DE} = 2.012 - 12.852 = -10.84$
$M_{ED} = 2 \times 2.012 - 12.852 = -8.83$
$M_{EC} = -1.17 \times 1.373 + 2.34 \times 2.012 - 1.95 \times 12.179 + 1.95 \times 12.852 = 4.41$
$M_{EF} = 2.34 \times 2.012 - 1.17 \times 1.373 + 1.95 \times 12.852 - 1.95 \times 12.179 = 4.41$
$M_{FE} = 1.17 \times 2.012 - 2.34 \times 1.373 + 1.95 \times 12.852 - 1.95 \times 12.179 = 0.45$
$M_{FH} = -2.34 \times 1.373 + 1.17 \times 3.479 - 1.95 \times 12.852 + 1.95 \times 12.179 = -0.45$
$M_{GH} = 3.479 - 12.179 = -8.7$
$M_{HG} = 2 \times 3.479 - 12.179 = -5.22$
$M_{HF} = -1.17 \times 1.373 + 2.34 \times 3.479 - 195 \times 12.852 + 1.95 \times 12.179 = 5.22$



M − D

図－7・30 (e)

反力の計算

B点のつり合い (B−A)

$5H_A - 8.7 = 5.22$ ∴ $H_A = 2.784$t (左) $= H_G$

E点のつり合い (E−D)

$5H_D - 10.84 = 8.83$ ∴ $H_D = 3.934$t (左)

E点のつり合い (E−C−B−A)

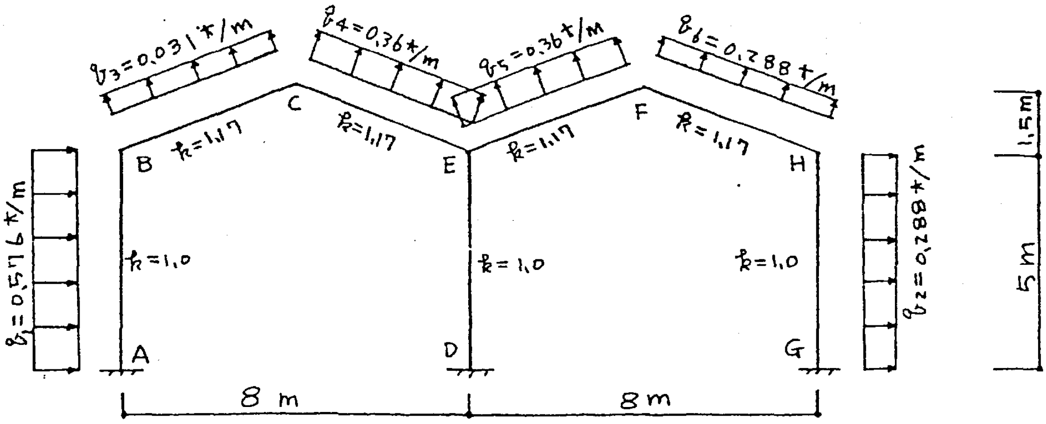
$-8V_A + 2.784 \times 5 + 1.5 \times 1.5 - 8.7 = -4.41$ ∴ $V_A = 1.485$t (下)

E点のつり合い (E−F−H−G)

$1.5 \times 1.5 + 2.784 \times 5 - 8.7 - 8V_A = -4.41$ ∴ $V_G = 1.485$t (上)

$\Sigma Y = 0$ より $V_D = 0$

(例題 7・21) 図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



図－7・31 (a)

(解) 部材角の関係は例題 7・20 に準ずる。

従って直角変位図より C を求める。

等分布荷重の合力

$P_1 = 0.576 \times 5 = 2.88$ t

$P_2 = 0.288 \times 5 = 1.44$ t

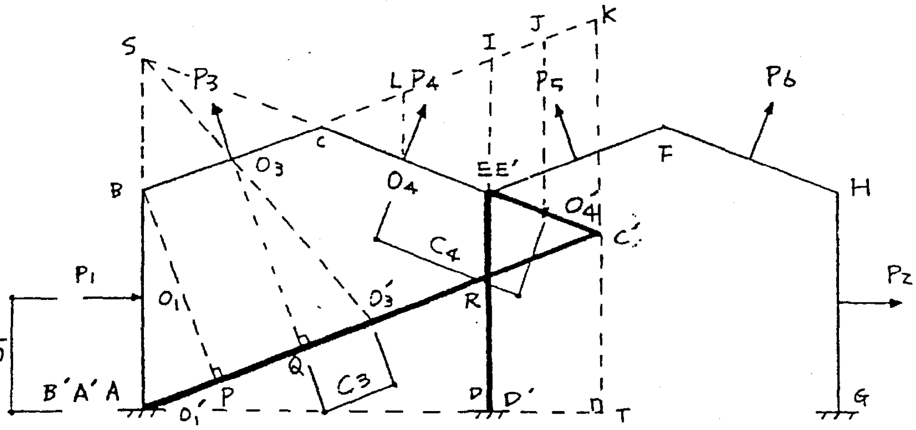
$P_3 = 0.031 \times 4.272 = 0.132$ t

$P_4 = 0.36 \times 4.272 = 1.538$ t

$P_5 = 0.36 \times 4.272 = 1.538$ t

$P_6 = 0.288 \times 4.272 = 1.23$ t

(Case－1)　$R_{AB} = 1$ の時



$R_{AB} = 1$

図－7・31 (b)

$C_1 = 2.5$ m

C_3 を求める

$C_3 = QO_3'$

$= B'C' - P'B - PQ - \frac{B'}{\ }$

△ S B' C' は C' を頂点とする二等辺三角形であるから TC' = 4 m

B'R = 8.544 m

B'R : B'C' = RD : C'T

8.544 : B'C' = 3 : 4

B'C' = 11.392 m

△B'BP ∽ △B'RD であるから

$$B'B : B'P = B'R : RD$$
$$5 : B'P = 8.544 : 3$$
$$B'P = 1.756\,m$$

$BC = 4.272\,m$ であるから　$PQ = BO_3 = \frac{1}{2} BC = 2.136\,m$

$$\therefore C_3 = B'C' - B'P - PQ - \frac{1}{2} B'C'$$
$$= 11.392 - 1.756 - 2.136 - \frac{1}{2} \times 11.392 = 1.804\,m$$

C_4 を求める。

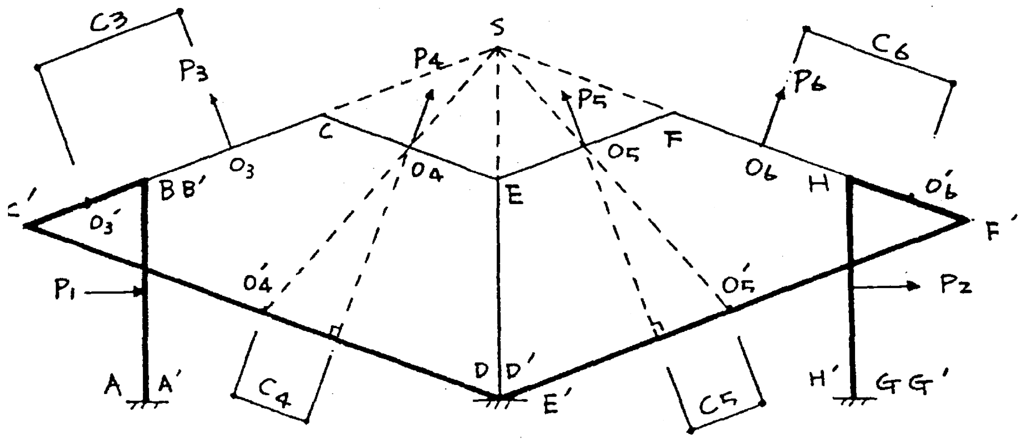
$KC' = 5\,m$　　$IE = 3\,m$　　$JO_4' = 4\,m$　　$LO_4' = 1.5\,m$

$CE = 4.272\,m$

$$CE : IE = CO_4' : JO_4'$$
$$4.272 : 3 = CO_4' : 4$$
$$CO_4' = 5.696\,m$$

$$C_4 = CO_4' - CO_4 = 5.696 - \frac{1}{2} \times 4.272 = 3.56\,m$$

(Case-2)　$R_{DE} = 1$ の時



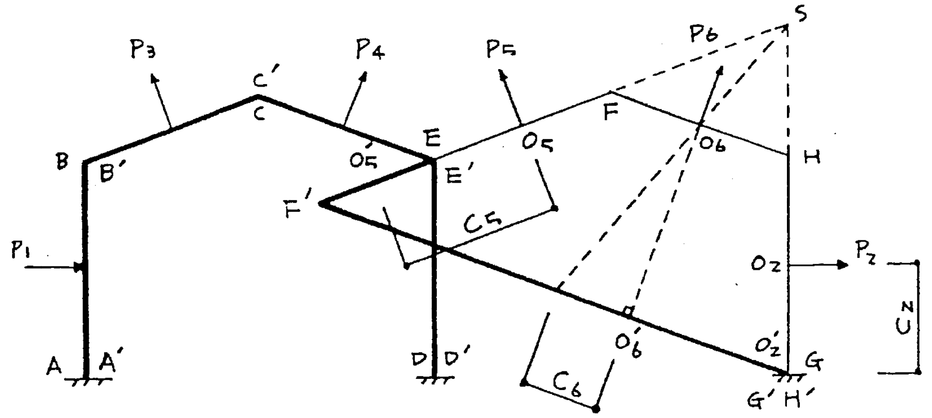
$R_{DE} = 1$

図－7.31 (c)

$C_3 = 3.56\,m = C_6$

$C_4 = 1.804\,m = C_5$

(Case－3)



$C_2 = 2.5\,m$
$C_5 = 3.56\,m$
$C_6 = 1.804\,m$

$R_{GH} = 1$

図－7・31 (d)

部材角相互の関係

	Case－1 $R_{AB}=1$	Case－2 $R_{DE}=1$	Case－3 $R_{GH}=1$	部　材　角
A－B	1.0			ψ_{AB}
B－C	－1.667	1.667		$-1.667\psi_{AB}+1.667\psi_{DE}$
C－E	1.667	－1.667		$1.667\psi_{AB}-1.667\psi_{DE}$
D－E		1.0		ψ_{DE}
E－F		－1.667	1.667	$-1.667\psi_{DE}+1.667\psi_{GH}$
F－H		1.667	－1.667	$1.667\psi_{DE}-1.667\psi_{GH}$
G－H			1.0	ψ_{GH}

C, M_o, Q_o の計算

A－B部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{AB} = -\dfrac{0.576\times5^2}{12} = -1.2\,tm = C_{BA} \\ M_0 = \dfrac{0.576\times5^2}{8} = 1.8\,tm \\ Q_0 = \dfrac{0.576\times5}{2} = 1.44\,t \end{array}\right.$$

B－C部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{BC} = \dfrac{0.031\times4.272^2}{12} = 0.047\,tm = -C_{CB} \\ M_0 = \dfrac{0.031\times4.272^2}{8} = 0.071\,tm \\ Q_0 = \dfrac{0.031\times4.272}{2} = 0.066\,t \end{array}\right.$$

C − E , E − F 部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{CE} = C_{EF} = \dfrac{0.36 \times 4.272^2}{12} = 0.547\ tm = -C_{EC} = -C_{FE} \\ M_0 = \dfrac{0.36 \times 4.272^2}{8} = 0.821\ tm \\ Q_0 = \dfrac{0.36 \times 4.272}{2} = 0.769\ t \end{array}\right.$$

F − H 部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{FH} = \dfrac{0.288 \times 4.272^2}{12} = 0.438\ tm = -C_{HF} \\ M_0 = \dfrac{0.288 \times 4.272^2}{8} = 0.657\ tm \\ Q_0 = \dfrac{0.288 \times 4.272}{2} = 0.615\ t \end{array}\right.$$

G − H 部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{GH} = -\dfrac{0.288 \times 5^2}{12} = -0.6\ tm = -C_{HG} \\ M_0 = \dfrac{0.288 \times 5^2}{8} = 0.9\ tm \\ Q_0 = \dfrac{0.288 \times 5}{2} = 0.72\ t \end{array}\right.$$

材端モーメント式

$$M_{AB} = \varphi_B + \psi_{AB} - 1.2$$
$$M_{BA} = 2\varphi_B + \psi_{AB} + 1.2$$
$$M_{BC} = 2.34\varphi_B + 1.17\varphi_C - 1.95\psi_{AB} + 1.95\psi_{DE} + 0.047$$
$$M_{CB} = 1.17\varphi_B + 2.34\varphi_C - 1.95\psi_{AB} + 1.95\psi_{DE} - 0.047$$
$$M_{CE} = 2.34\varphi_C + 1.17\varphi_E + 1.95\psi_{AB} - 1.95\psi_{DE} + 0.547$$
$$M_{DE} = \varphi_E + \psi_{DE}$$
$$M_{ED} = 2\varphi_E + \psi_{DE}$$
$$M_{EC} = 1.17\varphi_C + 2.34\varphi_E + 1.95\psi_{AB} - 1.95\psi_{DE} - 0.547$$
$$M_{EF} = 2.34\varphi_E + 1.17\varphi_F - 1.95\psi_{DE} + 1.95\psi_{GH} + 0.547$$
$$M_{FE} = 1.17\varphi_E + 2.34\varphi_F - 1.95\psi_{DE} + 1.95\psi_{GH} - 0.547$$
$$M_{FH} = 2.34\varphi_F + 1.17\varphi_H + 1.95\psi_{DE} - 1.95\psi_{GH} + 0.438$$
$$M_{GH} = \varphi_H + \psi_{GH} - 0.6$$
$$M_{HG} = 2\varphi_H + \psi_{GH} + 0.6$$
$$M_{HF} = 1.17\varphi_F + 2.34\varphi_H + 1.95\psi_{DE} - 1.95\psi_{GH} - 0.438$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0$ $\qquad M_{BA} + M_{BC} = 0$

$$4.34\varphi_B + 1.17\varphi_C - 0.95\psi_{AB} + 1.95\psi_{DE} = -1.247 \qquad \text{-------} \quad (1)$$

$\Sigma M_C = 0 \qquad M_{CB} + M_{CE} = 0$

$1.17\varphi_B + 4.68\varphi_C + 1.17\varphi_E = -0.5$ ------ (2)

$\Sigma M_E = 0 \qquad M_{ED} + M_{EC} + M_{EF} = 0$

$1.17\varphi_C + 6.68\varphi_E + 1.17\varphi_F + 1.95\psi_{AB} - 2.9\psi_{DE} + 1.95\psi_{GH} = 0$ ----- (3)

$\Sigma M_F = 0 \qquad M_{FE} + M_{FH} = 0$

$1.17\varphi_E + 4.68\varphi_F + 1.17\varphi_H = 0.109$ ------ (4)

$\Sigma M_H = 0 \qquad M_{HG} + M_{HF} = 0$

$1.17\varphi_F + 4.34\varphi_H + 1.95\psi_{DE} - 0.95\psi_{GH} = -0.162$ ------ (5)

力のつり合い式

(Case－1)

$\Sigma P\cdot C = P_1\cdot C_1 + P_3\cdot C_3 + P_4\cdot C_4 = 2.88\times 2.5 + 0.132\times 1.804 + 1.538\times 3.56$
$= 12.913$

$(M_{AB}+M_{BA})\times 1 + (M_{BC}+M_{CB})\times(-1.667) + (M_{CE}+M_{EC})\times 1.667 + 12.913 = 0$
$-2.851\varphi_B + 5.851\varphi_E + 15.003\psi_{AB} - 13.003\psi_{DE} = -12.913$ ------ (6)

(Case－2)

$\Sigma P\cdot C = P_3\cdot C_3 + P_4\cdot C_4 + P_5\cdot C_5 + P_6\cdot C_6$
$= -0.132\times 3.56 - 1.538\times 1.804 + 1.538\times 1.804 + 1.23\times 3.56 = 3.909$

$(M_{DE}+M_{ED})\times 1 + (M_{BC}+M_{CB})\times 1.667 + (M_{CE}+M_{EC})\times(-1.667)$
$+ (M_{EF}+M_{FE})\times(-1.667) + (M_{FH}+M_{HF})\times 1.667 + 3.909 = 0$
$5.851\varphi_B - 8.702\varphi_E + 5.851 - 13.003\psi_{AB} + 28.005\psi_{DE} - 13.003\psi_{GH} = -3.909$
------ (7)

(Case－3)

$\Sigma P\cdot C = P_5\cdot C_5 + P_6\cdot C_6 + P_2\cdot C_2 = -1.538\times 3.56 - 1.23\times 1.804 + 1.44\times 2.5 = -4.094$

$(M_{GH}+M_{HG})\times 1 + (M_{EF}+M_{FE})\times 1.667 + (M_{FH}+M_{HF})\times(-1.667) - 4.094 = 0$
$5.851\varphi_E - 2.851\varphi_H - 13.003\psi_{DE} + 15.003\psi_{GH} = 4.094$ ----- (8)

	φ_B	φ_C	φ_E	φ_F	φ_H	Ψ_{AB}	Ψ_{DE}	Ψ_{GH}	右辺
$\Sigma M_B=0$	4.34	1,17				−0,95	1,95		−1,247
$\Sigma M_C=0$	1,17	4,68	1,17						−0,5
$\Sigma M_E=0$		1,17	6,68	1,17		1,95	−2,9	1,95	0
$\Sigma M_F=0$			1,17	4,68	1,17				0,109
$\Sigma M_H=0$				1,17	4,34		1,95	−0,95	−0,162
Case−1	−2,851		5,851			15,003	−13,003		−12,913
Case−2	5,851		−8,702		5,851	−13,003	28,005	−13,003	−3,909
Case−3			5,851		−2,851		−13,003	15,003	4,094

連立に解いて

$\varphi_B = 0{,}375$　　$\varphi_C = -0{,}343$,　$\varphi_E = 0{,}57$,　$\varphi_F = -0{,}343$

$\varphi_H = 0{,}895$,　$\Psi_{AB} = -3{,}655$,　$\Psi_{DE} = -3{,}05$　　$\Psi_{GH} = -2{,}42$

材端モーメント式に代入する。

$M_{AB} = 0{,}375 - 3{,}655 - 1{,}2 = -4{,}48$ (tm)

$M_{BA} = 2 \times 0{,}375 - 3{,}655 + 1{,}2 = -1{,}71$

$M_{BC} = 2{,}34 \times 0{,}375 - 1{,}17 \times 0{,}343 + 1{,}95 \times 3{,}655 - 1{,}95 \times 3{,}05 + 0{,}047 = 1{,}71$

$M_{CB} = 1{,}17 \times 0{,}375 - 2{,}34 \times 0{,}343 + 1{,}95 \times 3{,}655 - 1{,}95 \times 3{,}05 - 0{,}047 = 0{,}77$

$M_{CE} = -2{,}34 \times 0{,}343 + 1{,}17 \times 0{,}57 - 1{,}95 \times 3{,}655 + 1{,}95 \times 3{,}05 + 0{,}547 = -0{,}77$

$M_{DE} = 0{,}57 - 3{,}05 = -2{,}48$

$M_{ED} = 2 \times 0{,}57 - 3{,}05 = -1{,}91$

$M_{EC} = -1{,}17 \times 0{,}343 + 2{,}34 \times 0{,}57 - 1{,}95 \times 3{,}655 + 1{,}95 \times 3{,}05 - 0{,}547 = -0{,}79$

$M_{EF} = 2{,}34 \times 0{,}57 - 1{,}17 \times 0{,}343 + 1{,}95 \times 3{,}05 - 1{,}95 \times 2{,}42 + 0{,}547 = 2{,}7$

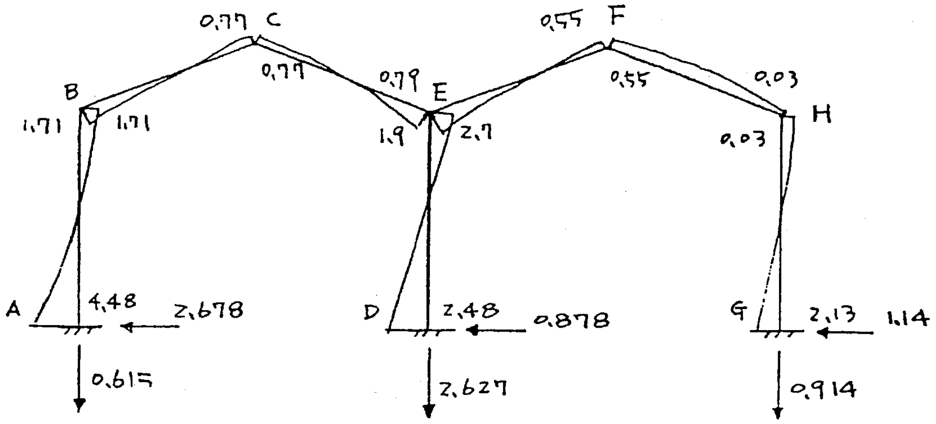
$M_{FE} = 1{,}17 \times 0{,}57 - 2{,}34 \times 0{,}343 + 1{,}95 \times 3{,}05 - 1{,}95 \times 2{,}42 - 0{,}547 = 0{,}55$

$M_{FH} = -2{,}34 \times 0{,}343 + 1{,}17 \times 0{,}895 - 1{,}95 \times 3{,}05 + 1{,}95 \times 2{,}42 + 0{,}438 = -0{,}55$

$M_{GH} = 0{,}895 - 2{,}42 - 0{,}6 = -2{,}13$

$M_{HG} = 2 \times 0{,}895 - 2{,}42 + 0{,}6 = -0{,}03$

$M_{HF} = -1{,}17 \times 0{,}343 + 2{,}34 \times 0{,}895 - 1{,}95 \times 3{,}05 + 1{,}95 \times 2{,}42 - 0{,}438 = 0{,}03$



M − D

図−7・31（e）

反力の計算

B点のつり合い（B − A）

$5H_A - 4.48 - 2.88 \times 2.5 = 1.71$　　∴ $H_A = 2.678t$（左）

E点のつり合い（E − D）

$5H_D - 2.48 = 1.91$　　∴ $H_D = 0.878t$（左）

H点のつり合い（H − G）

$5H_G - 2.13 - 1.44 \times 2.5 = -0.03$　　∴ $H_G = 1.14t$（左）

C点のつり合い（C − B − A）

$2.678 \times 6.5 - 4.48 - 4V_A - 2.88 \times 4 + 0.132 \times 2.136 = -0.77$

∴ $V_A = 0.615t$（下）

F点のつり合い（F − H − G）

$5V_G - 2.13 + 1.14 \times 6.5 - 1.44 \times 4 - 1.23 \times 2.136 = 0.55$

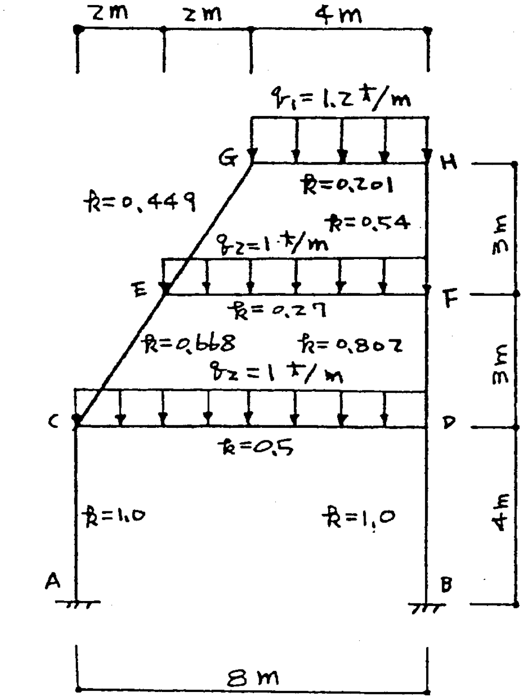
∴ $V_G = 0.914t$（下）

$\Sigma Y = 0$ より

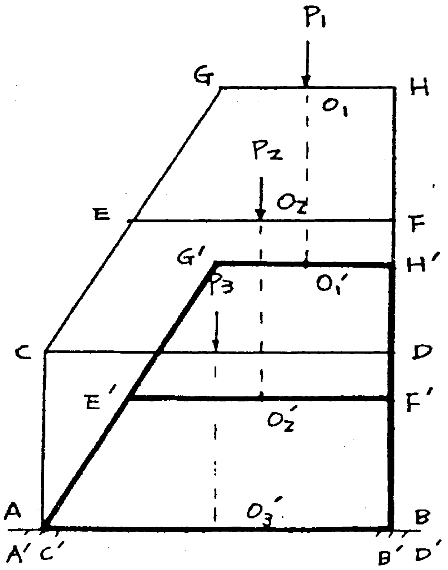
$(2.88 + 1.538 + 1.538 + 1.23) \times \dfrac{4}{4.272} - 0.615 - 0.914 - V_D = 0$

∴ $V_D = 2.627t$（下）

（例題 7・22）



図－7・32（a）



$R_{BD}=1$

図－7・32（b）

図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

（解）

独立変形部材の数

$$n = 9 - 2 \times 3 = 3 \text{個}$$

B－D, D－F, F－H を独立変形部材とする。

等分布荷重の合力を求める。

$$P_1 = 1.2 \times 4 = 4.8 \text{ t}$$
$$P_2 = 1.0 \times 6 = 6 \text{ t}$$
$$P_3 = 1.0 \times 8 = 8 \text{ t}$$

（Case－1） $R_{BD} = 1$ の時

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$

$R_{BD} = 1$ の時

$R_{AC} = 1$

(Case-2) $R_{DF} = 1$ の時

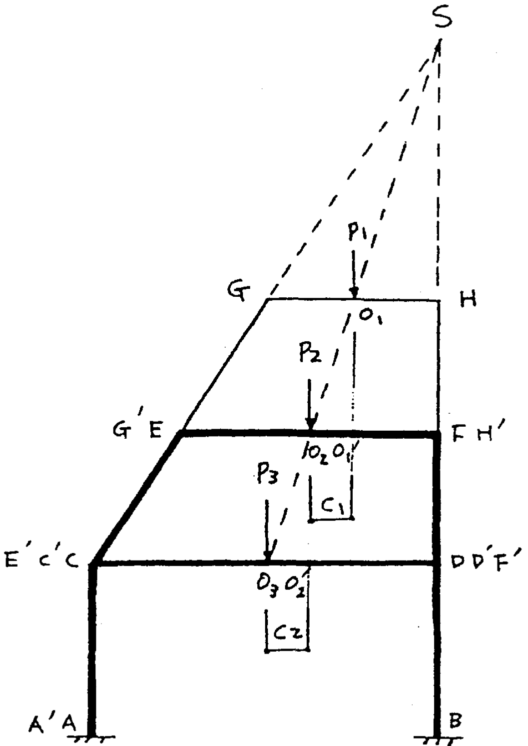
$C_1 = C_2 = 1\,m$

$R_{DF} = 1$ の時

$$R_{CE} = 1 - \frac{C'E'}{CE} = 1$$

$$R_{EF} = 1 - \frac{E'F'}{EF} = 1 - \frac{8}{6} = -0{,}33$$

$$R_{GH} = 1 - \frac{G'H'}{GH} = 1 - \frac{6}{4} = -0{,}5$$



$R_{DF} = 1$

図－7.32 (c)

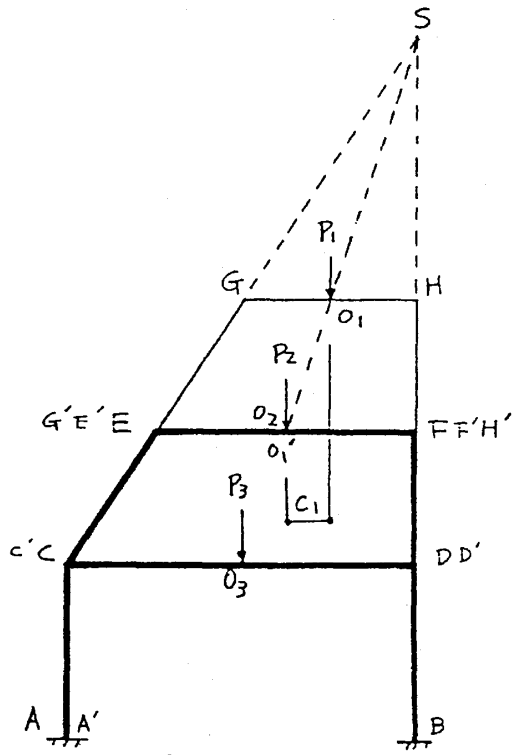
(Case-3) $R_{FH} = 1$ の時

$C_1 = 1\,m$

$R_{FH} = 1$ の時

$$R_{EG} = 1$$

$$R_{GH} = 1 - \frac{G'H'}{GH} = 1 - \frac{6}{4} = -0{,}5$$



$R_{FH} = 1$

図－7.32 (d)

部材角相互の関係

	Case-1 $R_{BD}=1$	Case-2 $R_{DF}=1$	Case-3 $R_{FH}=1$	部　材　角
A − C	1.0			ψ_{BD}
C − E		1.0		ψ_{DF}
E − G			1.0	ψ_{FH}
B − D	1.0			ψ_{BD}
D − F		1.0		ψ_{DF}
F − H			1.0	ψ_{FH}
G − H		−0.5	−0.5	$-0.5\psi_{DF}-0.5\psi_{FH}$
E − F		−0.333		$-0.333\psi_{DF}$

C, M_0, Q_0の計算

C − D部材

$$\begin{cases} C_{CD} = -\dfrac{1\times 8^2}{12} = -5.333\ \text{tm} = -C_{DC} \\ M_0 = \dfrac{1\times 8^2}{8} = 8\ \text{tm} \\ Q_0 = \dfrac{1\times 8}{2} = 4\ \text{t} \end{cases}$$

E − F部材

$$\begin{cases} C_{EF} = -\dfrac{1\times 6^2}{12} = -3\ \text{tm} = -C_{FE} \\ M_0 = \dfrac{1\times 6^2}{8} = 4.5\ \text{tm} \\ Q_0 = \dfrac{1\times 6}{2} = 3\ \text{t} \end{cases}$$

G − H部材

$$\begin{cases} C_{GH} = -\dfrac{1.2\times 4^2}{12} = -1.6\ \text{tm} = -C_{HG} \\ M_0 = \dfrac{1.2\times 4^2}{8} = 2.4\ \text{tm} \\ Q_0 = \dfrac{1.2\times 4}{2} = 2.4\ \text{t} \end{cases}$$

材端モーメント式

$$M_{AC} = 1.0(\varphi_C + \psi_{BD}) = \varphi_C + \psi_{BD}$$
$$M_{BD} = 1.0(\varphi_D + \psi_{BD}) = \varphi_D + \psi_{BD}$$
$$M_{CA} = 1.0(2\varphi_C + \psi_{BD}) = 2\varphi_C + \psi_{BD}$$
$$M_{CD} = 0.5(2\varphi_C + \varphi_D) - 5.333 = \varphi_C + 0.5\varphi_D - 5.333$$
$$M_{CE} = 0.668(2\varphi_C + \varphi_E + \psi_{DF}) = 1.336\varphi_C + 0.668\varphi_E + 0.668\psi_{DF}$$
$$M_{DB} = 1.0(2\varphi_D + \psi_{BD}) = 2\varphi_D + \psi_{BD}$$
$$M_{DC} = 0.5(2\varphi_D + \varphi_C) + 5.333 = 0.5\varphi_C + \varphi_D + 5.333$$
$$M_{DF} = 0.802(2\varphi_D + \varphi_F + \psi_{DF}) = 1.604\varphi_D + 0.802\varphi_F + 0.802\psi_{DF}$$
$$M_{EC} = 0.668(2\varphi_E + \varphi_C + \psi_{DF}) = 0.668\varphi_C + 1.336\varphi_E + 0.668\psi_{DF}$$
$$M_{EF} = 0.27(2\varphi_E + \varphi_F - 0.333\psi_{DF}) - 3 = 0.54\varphi_E + 0.27\varphi_F - 0.09\psi_{DF} - 3$$
$$M_{EG} = 0.449(2\varphi_E + \varphi_G + \psi_{FH}) = 0.898\varphi_E + 0.449\varphi_G + 0.449\psi_{FH}$$
$$M_{FD} = 0.802(2\varphi_F + \varphi_D + \psi_{DF}) = 0.802\varphi_D + 1.604\varphi_F + 0.802\psi_{DF}$$
$$M_{FE} = 0.27(2\varphi_F + \varphi_E - 0.333\psi_{DF}) + 3 = 0.27\varphi_E + 0.54\varphi_F - 0.09\psi_{DF} + 3$$
$$M_{FH} = 0.54(2\varphi_F + \varphi_H + \psi_{FH}) = 1.08\varphi_F + 0.54\varphi_H + 0.54\psi_{FH}$$
$$M_{GE} = 0.449(2\varphi_G + \varphi_E + \psi_{FH}) = 0.449\varphi_E + 0.898\varphi_G + 0.449\psi_{FH}$$
$$M_{GH} = 0.201(2\varphi_G + \varphi_H - 0.5\psi_{DF} - 0.5\psi_{FH}) - 1.333$$
$$= 0.402\varphi_G + 0.201\varphi_H - 0.101\psi_{DF} - 0.101\psi_{FH} - 1.6$$
$$M_{HF} = 0.54(2\varphi_H + \varphi_F + \psi_{FH}) = 0.54\varphi_F + 1.08\varphi_H + 0.54\psi_{FH}$$
$$M_{HG} = 0.201(2\varphi_H + \varphi_G - 0.5\psi_{DF} - 0.5\psi_{FH}) + 1.333$$
$$= 0.201\varphi_G + 0.402\varphi_H - 0.101\psi_{DF} - 0.101\psi_{FH} + 1.6$$

節点方程式

$\Sigma M_C = 0$ $\quad M_{CA} + M_{CD} + M_{CE} = 0$

$$4.336\varphi_C + 0.5\varphi_D + 0.668\varphi_E + \psi_{BD} + 0.668\psi_{DF} = 5.333 \quad \text{------} \quad (1)$$

$\Sigma M_D = 0$ $\quad M_{DB} + M_{DC} + M_{DF} = 0$

$$0.5\varphi_C + 4.604\varphi_D + 0.802\varphi_F + \psi_{BD} + 0.802\psi_{DF} = -5.333 \quad \text{------} \quad (2)$$

$\Sigma M_E = 0$ $\quad M_{EC} + M_{EF} + M_{EG} = 0$

$$0.668\varphi_C + 2.774\varphi_E + 0.27\varphi_F + 0.449\varphi_G + 0.578\psi_{DF} + 0.449\psi_{FH} = 3.0 \quad \text{------} \quad (3)$$

$\Sigma M_F = 0$ $\quad M_{FD} + M_{FE} + M_{FH} = 0$

$$0.802\varphi_D + 0.27\varphi_E + 3.224\varphi_F + 0.54\varphi_H + 0.712\psi_{DF} + 0.54\psi_{FH} = -3.0 \quad \text{------} \quad (4)$$

$\Sigma M_G = 0$ $\quad M_{GE} + M_{GH} = 0$

$$0.449\varphi_E + 1.3\varphi_G + 0.201\varphi_H - 0.101\psi_{DF} + 0.348\psi_{FH} = 1.6 \quad \text{------} \quad (5)$$

$\Sigma M_H = 0$ $\quad M_{HF} + M_{HG} = 0$

$$0.54\varphi_F + 0.201\varphi_G + 1.482\varphi_H - 0.101\psi_{DF} + 0.439\psi_{FH} = -1.6 \quad \text{------} \quad (6)$$

力のつり合い式

(Case－1)

$$\Sigma P \cdot C = 0$$

$$(M_{BD} + M_{DB}) \times 1 + (M_{AC} + M_{CA}) \times 1 = 0$$

$$3\varphi_C + 3\varphi_D + 4\Psi_{BD} = 0 \qquad \text{-------} (7)$$

(Case－2)

$$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 = 4.8 \times 1 + 6 \times 1 = 10.8$$

$$(M_{DF} + M_{FD}) \times 1 + (M_{CE} + M_{EC}) \times 1 + (M_{EF} + M_{FE}) \times (-0.333) + (M_{GH} + M_{HG}) \times (-0.5) + 10.8 = 0$$

$$2.004\varphi_C + 2.406\varphi_D + 1.734\varphi_E + 2.136\varphi_F - 0.302\varphi_G - 0.302\varphi_H + 3.101\Psi_{DF} + 0.101\Psi_{FH} = -10.8 \qquad \text{-------} (8)$$

(Case－3)

$$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 = 4.8 \times 1 = 4.8$$

$$(M_{FH} + M_{HF}) \times 1 + (M_{EG} + M_{GE}) \times 1 + (M_{GH} + M_{HG}) \times (-0.5) + 4.8 = 0$$

$$1.347\varphi_E + 1.62\varphi_F + 1.046\varphi_G + 1.319\varphi_H + 0.101\Psi_{DF} + 2.079\Psi_{FH} = -4.8 \qquad \text{------} (9)$$

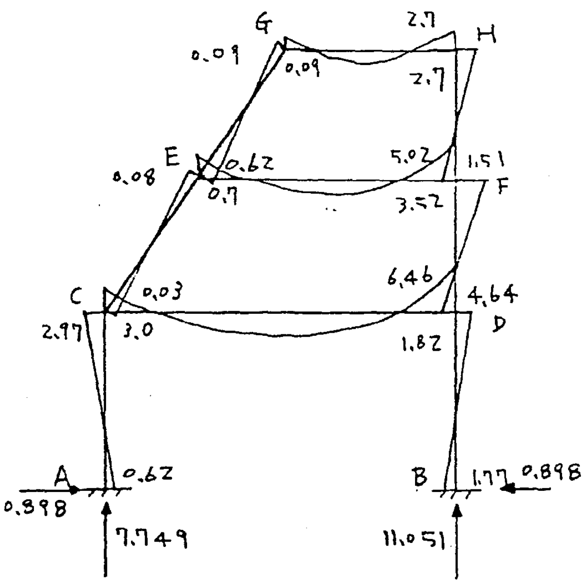
	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G	φ_H	Ψ_{BD}	Ψ_{DF}	Ψ_{FH}	右辺
$\Sigma M_C=0$	4.336	0.5	0.668				1	0.668		5.333
$\Sigma M_D=0$	0.5	4.604		0.802			1	0.802		-5.333
$\Sigma M_E=0$	0.668		2.774	0.27	0.449			0.578	0.499	3
$\Sigma M_F=0$		0.802	0.27	3.224		0.54		0.712	0.54	-3
$\Sigma M_G=0$			0.449		1.3	0.201		-0.101	0.348	1.6
$\Sigma M_H=0$				0.54	0.201	1.482		-0.101	0.439	-1.6
Case－1	3	3					4			0
Case－2	2.004	2.406	1.734	2.136	-0.302	-0.302		3.101	0.101	-10.8
Case－3			1.347	1.62	1.046	1.319		0.101	2.079	-4.8

連立に解いて

$\varphi_C = 2.351$, $\varphi_D = -0.045$, $\varphi_E = 2.413$, $\varphi_F = 1.363$
$\varphi_G = 1.230$, $\varphi_H = -0.839$, $\psi_{BD} = -1.729$, $\psi_{DF} = -7.064$
$\psi_{FH} = -4.677$

材端モーメント式に代入する

$M_{AC} = 2.351 - 1.729 = 0.62$ (tm)
$M_{BD} = -0.045 - 1.729 = -1.77$
$M_{CA} = 2 \times 2.351 - 1.729 = 2.97$
$M_{CD} = 2.351 - 0.5 \times 0.045 - 5.333 = -3.0$
$M_{CE} = 1.336 \times 2.351 + 0.668 \times 2.413 - 0.668 \times 7.064 = 0.03$
$M_{DB} = -2 \times 0.045 - 1.729 = -1.82$
$M_{DC} = 0.5 \times 2.351 - 0.045 + 5.333 = 6.46$
$M_{DF} = -1.604 \times 0.045 + 0.802 \times 1.363 - 0.802 \times 7.064 = -4.64$
$M_{EC} = 0.668 \times 2.351 + 1.336 \times 2.413 - 0.668 \times 7.064 = 0.08$
$M_{EF} = 0.54 \times 2.413 + 0.27 \times 1.363 + 0.09 \times 7.064 - 3 = -0.7$
$M_{EG} = 0.898 \times 2.413 + 0.449 \times 1.23 - 0.449 \times 4.677 = 0.62$
$M_{FD} = -0.802 \times 0.045 + 1.604 \times 1.363 - 0.802 \times 7.064 = -3.52$
$M_{FE} = 0.27 \times 2.413 + 0.54 \times 1.363 + 0.09 \times 7.064 + 3 = 5.02$
$M_{FH} = 1.08 \times 1.363 - 0.54 \times 0.839 - 0.54 \times 4.677 = -1.51$
$M_{GE} = 0.449 \times 2.413 + 0.898 \times 1.23 - 0.449 \times 4.677 = 0.09$
$M_{GH} = 0.402 \times 1.23 - 0.201 \times 0.839 + 0.101 \times 7.064 + 0.101 \times 4.677 - 1.6 = -0.09$
$M_{HF} = 0.54 \times 1.363 - 1.08 \times 0.839 - 0.54 \times 4.677 = -2.7$
$M_{HG} = 0.201 \times 1.23 - 0.402 \times 0.839 + 0.101 \times 7.064 + 0.101 \times 4.677 + 1.6 = 2.7$



M－D
図－7・32(e)

反力の計算

C点のつり合い（C－A）
$-4H_A + 0.62 = -2.97$
∴ $H_A = 0.898$ t（右）

D点のつり合い（D－B）
$4H_B - 1.77 = 1.82$
$H_B = 0.898$ t（左）

A点のつり合い
$4.8 \times 6 + 6 \times 5 + 8 \times 4 - 1.77 - 8V_D = 0.62$
∴ $V_D = 11.051$（上）

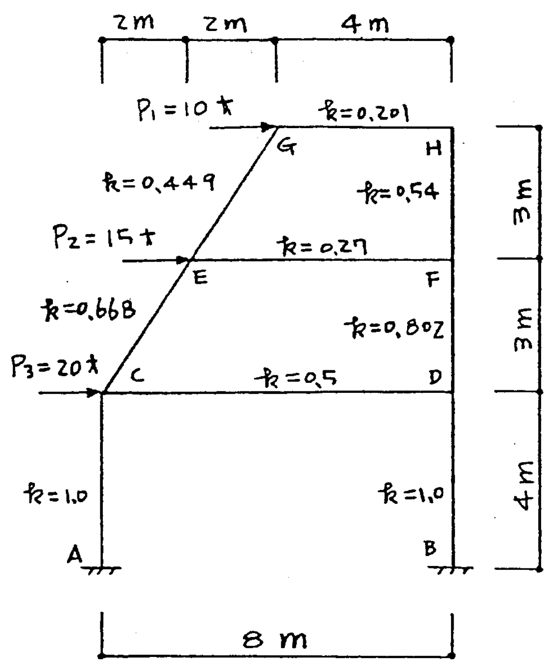
$\Sigma Y = 0$ より
$-4.8 - 6 - 8 + 11.051 + V_A = 0$
∴ $V_A = 7.749$ t（上）

（例題 7·23）

図のラーメン図の曲げモーメント図を求めよ。

（解） 部材角の関係は例題 7·22 に準ずる。

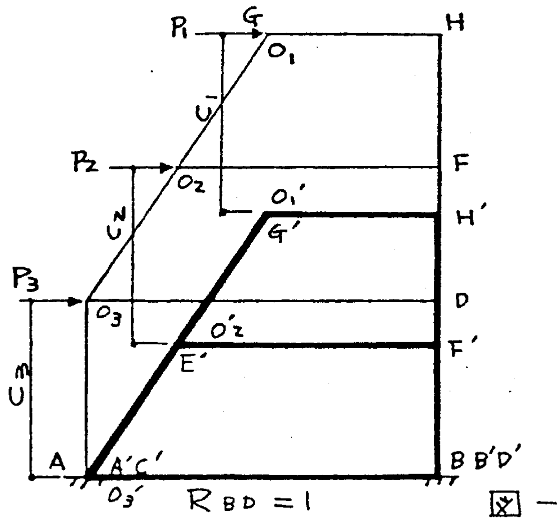
従って直角変位図より C を求める。



図−7·33 (a)

（Case−1） $R_{BD}=1$ の時

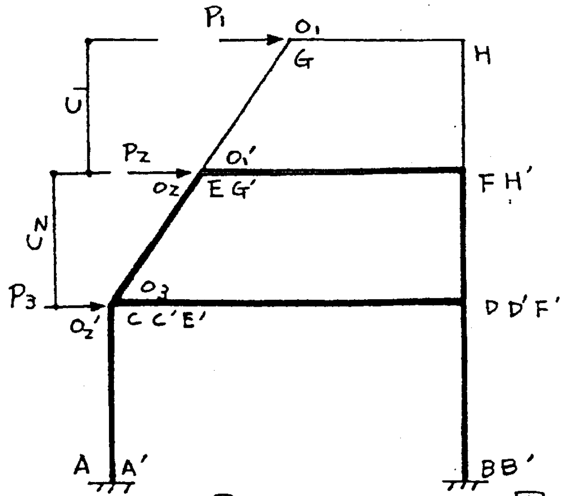
$$C_1 = C_2 = C_3 = 4\,m$$



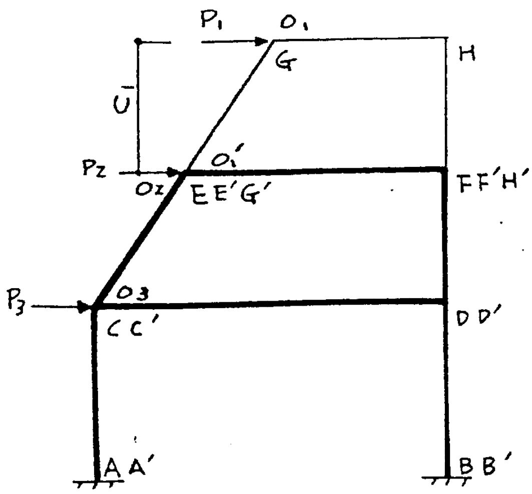
$R_{BD}=1$ 図−7·33 (b)

（Case−2） $R_{DF}=1$ の時

$$C_1 = C_2 = 3\,m$$



$R_{DF}=1$ 図−7·33 (c)



$R_{FH} = 1$

図－7・33(d)

(Case－3)　$R_{FH} = 1$　の時

$C_1 = 3\ m$

部材角相互の関係

	Case－1 $R_{BD}=1$	Case－2 $R_{DF}=1$	Case－3 $R_{FH}=1$	部　材　角
A－C	1.0			ψ_{BD}
C－E		1.0		ψ_{DF}
E－G			1.0	ψ_{FH}
B－D	1.0			ψ_{BD}
D－F		1.0		ψ_{DF}
F－H			1.0	ψ_{FH}
G－H		−0.5	−0.5	$-0.5\psi_{DF}-0.5\psi_{FH}$
E－F		−0.333		$-0.333\psi_{DF}$

材端モーメント式

$$M_{AC} = \varphi_C + \psi_{BD}$$
$$M_{BD} = \varphi_D + \psi_{BD}$$
$$M_{CA} = 2\varphi_C + \psi_{BD}$$
$$M_{CD} = \varphi_C + 0.5\varphi_D$$
$$M_{CE} = 1.336\varphi_C + 0.668\varphi_E + 0.668\psi_{DF}$$
$$M_{DB} = 2\varphi_D + \psi_{BD}$$
$$M_{DC} = 0.5\varphi_C + \varphi_D$$
$$M_{DF} = 1.604\varphi_D + 0.802\varphi_F + 0.802\psi_{DF}$$
$$M_{EC} = 0.668\varphi_C + 1.336\varphi_E + 0.668\psi_{DF}$$
$$M_{EF} = 0.54\varphi_E + 0.27\varphi_F - 0.09\psi_{DF}$$

$$M_{FD} = 0.802\varphi_D + 1.604\varphi_F + 0.802\psi_{DF}$$
$$M_{FE} = 0.27\varphi_E + 0.54\varphi_F - 0.09\psi_{DF}$$
$$M_{FH} = 1.08\varphi_F + 0.54\varphi_H + 0.54\psi_{FH}$$
$$M_{GE} = 0.449\varphi_E + 0.898\varphi_G + 0.449\psi_{FH}$$
$$M_{GH} = 0.402\varphi_G + 0.201\varphi_H - 0.101\psi_{DF} - 0.101\psi_{FH}$$
$$M_{HF} = 0.54\varphi_F + 1.08\varphi_H + 0.54\psi_{FH}$$
$$M_{HG} = 0.201\varphi_G + 0.402\varphi_H - 0.101\psi_{DF} - 0.101\psi_{FH}$$

節点方程式

$\Sigma M_C = 0 \qquad M_{CA} + M_{CD} + M_{CE} = 0$

$4.336\varphi_C + 0.5\varphi_D + 0.668\varphi_E + \psi_{BD} + 0.668\psi_{DF} = 0$ ------ (1)

$\Sigma M_D = 0 \qquad M_{DB} + M_{DC} + M_{DF} = 0$

$0.5\varphi_C + 4.604\varphi_D + 0.802\varphi_F + \psi_{BD} + 0.802\psi_{DF} = 0$ ------ (2)

$\Sigma M_E = 0 \qquad M_{EC} + M_{EF} + M_{EG} = 0$

$0.668\varphi_C + 2.774\varphi_E + 0.27\varphi_F + 0.449\varphi_G + 0.578\psi_{DF} + 0.449\psi_{FH} = 0$ ---- (3)

$\Sigma M_F = 0 \qquad M_{FD} + M_{FE} + M_{FH} = 0$

$0.802\varphi_D + 0.27\varphi_E + 3.224\varphi_F + 0.54\varphi_H + 0.712\psi_{DF} + 0.54\psi_{FH} = 0$ ------ (4)

$\Sigma M_G = 0 \qquad M_{GE} + M_{GH} = 0$

$0.449\varphi_E + 1.3\varphi_G + 0.201\varphi_H - 0.101\psi_{DF} + 0.348\psi_{FH} = 0$ ---- (5)

$\Sigma M_H = 0 \qquad M_{HF} + M_{HG} = 0$

$0.54\varphi_F + 0.201\varphi_G + 1.482\varphi_H - 0.101\psi_{DF} + 0.439\psi_{FH} = 0$ ------ (6)

力のつり合い式

(Case − 1)

$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 + P_3 \cdot C_3 = 10 \times 4 + 15 \times 4 + 20 \times 4 = 180$

$(M_{BD} + M_{DB}) \times 1 + (M_{AC} + M_{CA}) \times 1 + 180 = 0$

$3\varphi_C + 3\varphi_D + 4\psi_{BD} = -180$ ------ (7)

(Case- 2)

$$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 + P_2 \cdot C_2 = 10 \times 3 + 15 \times 3 = 75$$

$$(M_{DF} + M_{FD}) \times 1 + (M_{CE} + M_{EC}) \times 1 + (M_{EF} + M_{FE}) \times (-0.333) + (M_{GH} + M_{HG}) \times (-0.5) + 75 = 0$$

$$2.004\varphi_C + 2.406\varphi_D + 1.734\varphi_E + 2.136\varphi_F - 0.302\varphi_G - 0.302\varphi_H + 3.101\Psi_{DF} + 0.101\Psi_{FH} = -75 \quad \text{------} \quad (8)$$

(Case - 3)

$$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 = 10 \times 3 = 30$$

$$(M_{FH} + M_{HF}) \times 1 + (M_{EG} + M_{GE}) \times 1 + (M_{GH} + M_{HG}) \times (-0.5) + 30 = 0$$

$$1.347\varphi_E + 1.62\varphi_F + 1.046\varphi_G + 1.319\varphi_H + 0.101\Psi_{DF} + 2.079\Psi_{FH} = -30 \quad \text{------} \quad (9)$$

	φ_C	φ_D	φ_E	φ_F	φ_G	φ_H	Ψ_{BD}	Ψ_{DF}	Ψ_{FH}	右辺
$\Sigma M_C=0$	4.336	0.5	0.668				1.0	0.668		0
$\Sigma M_D=0$	0.5	4.604		0.802			1.0	0.802		0
$\Sigma M_E=0$	0.668		2.774	0.27	0.449			0.578	0.449	0
$\Sigma M_F=0$		0.802	0.27	3.224		0.54		0.712	0.54	0
$\Sigma M_G=0$			0.449		1.3	0.201		-0.101	0.348	0
$\Sigma M_H=0$				0.54	0.201	1.482		-0.101	0.439	0
Case-1	3.0	3.0					4.0			-180
Case-2	2.004	2.406	1.734	2.136	-0.302	-0.302		3.101	0.101	-75
Case-3			1.347	1.62	1.046	1.319		0.101	2.079	-30

連立に解いて

$\varphi_C = 26.742$, $\varphi_D = 26.955$, $\varphi_E = 13.842$, $\varphi_F = 14.866$

$\varphi_G = -3.119$, $\varphi_H = -2.088$, $\Psi_{BD} = -85.273$, $\Psi_{DF} = -79.949$

$\Psi_{FH} = -28.204$

材端モーメント式に代入する

$M_{AC} = 26.742 - 85.273 = -58.53$ (tm)

$M_{BD} = 26.955 - 85.273 = -58.32$

$M_{CA} = 2 \times 26.742 - 85.273 = -31.79$

$M_{CD} = 26.742 + 0.5 \times 26.955 = 40.22$

$M_{CE} = 1.336 \times 26.742 + 0.668 \times 13.842 - 0.668 \times 79.949 = -8.43$

$M_{DB} = 2 \times 26.955 - 85.273 = -31.36$

$M_{DC} = 0.5 \times 26.742 + 26.955 = 40.33$

$M_{DF} = 1.604 \times 26.955 + 0.802 \times 14.866 - 0.802 \times 79.949 = -8.96$

$M_{EC} = 0.668 \times 26.742 + 1.336 \times 13.842 - 0.668 \times 79.949 = -17.05$

$M_{EF} = 0.54 \times 13.842 + 0.27 \times 14.866 + 0.09 \times 79.949 = 18.68$

$M_{EG} = 0.898 \times 13.842 - 0.449 \times 3.119 - 0.449 \times 28.204 = -1.63$

$M_{FD} = 0.802 \times 26.955 + 1.604 \times 14.866 - 0.802 \times 79.949 = -18.66$

$M_{FE} = 0.27 \times 13.842 + 0.54 \times 14.866 + 0.09 \times 79.949 = 18.96$

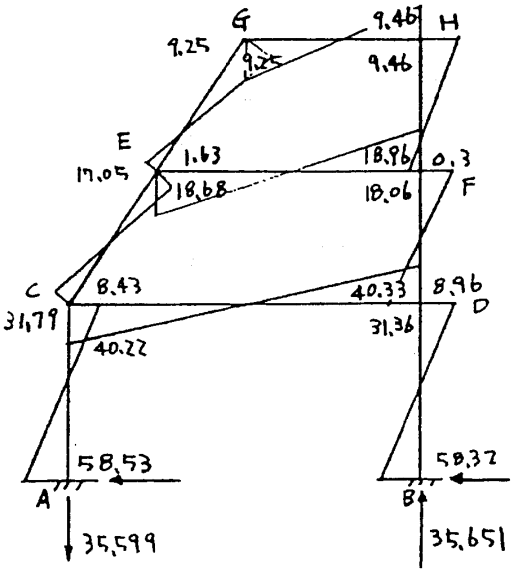
$M_{FH} = 1.08 \times 14.866 - 0.54 \times 2.088 - 0.54 \times 28.204 = -0.3$

$M_{GE} = 0.449 \times 13.842 - 0.898 \times 3.119 - 0.449 \times 28.204 = -9.25$

$M_{GH} = -0.402 \times 3.119 - 0.201 \times 2.088 + 0.101 \times 79.949 + 0.101 \times 28.204 = 9.25$

$M_{HF} = 0.54 \times 14.866 - 1.08 \times 2.088 - 0.54 \times 28.204 = -9.46$

$M_{HG} = -0.201 \times 3.119 - 0.402 \times 2.088 + 0.101 \times 79.949 + 0.101 \times 28.204 = 9.46$



M − D

図−7.33(e)

反力の計算

C点のつり合い(C−A)

$4H_A - 58.53 = 31.79$

$\therefore H_A = 22.58$ t(左)

D点のつり合い(D−B)

$4H_A - 58.32 = 31.36$

$\therefore H_A = 22.42$ t(左)

C点のつり合い

$10 \times 10 + 15 \times 7 + 20 \times 4 - 58.32$
$- 8V_B = -58.53$

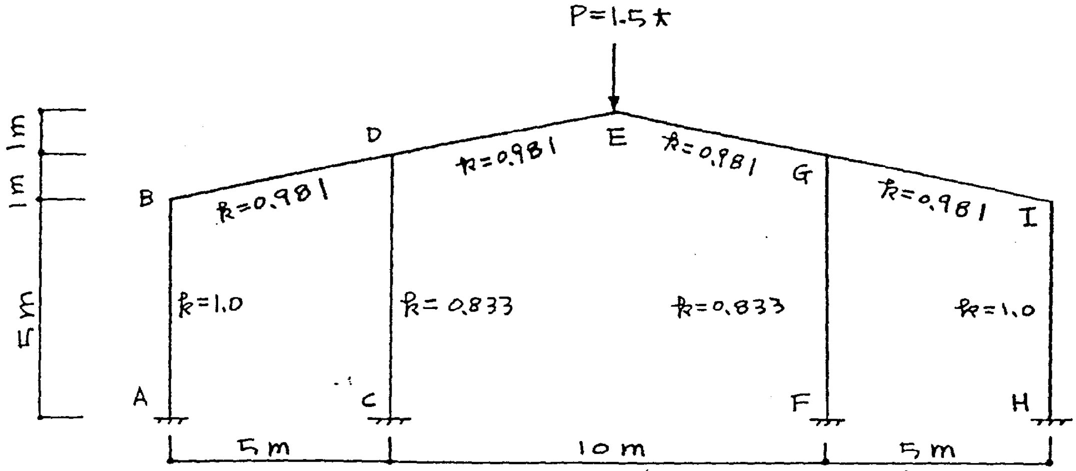
$V_B = 35.651$ t (上)

B点のつり合い

$10 \times 10 + 15 \times 7 + 20 \times 4 - 58.53$
$- 8V_B = -58.32$

$V_A = 35.599$ t (下)

（例題 7・24） 図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

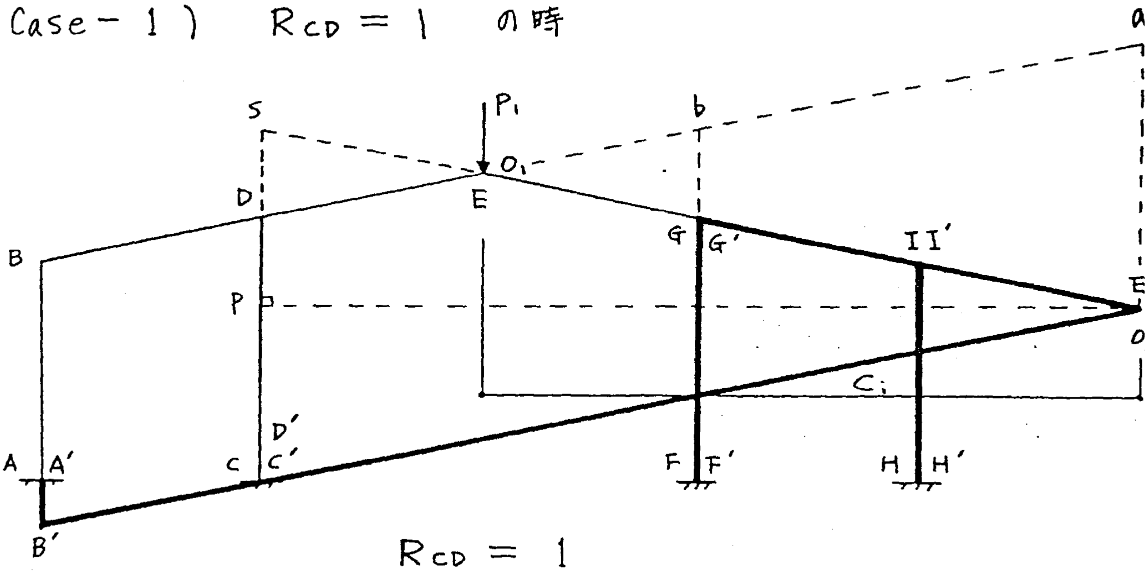


図－7・34（a）

（解）　独立変形部材の数　　$n = 8 - 2 \times 3 = 2$ 個

C－D，F－G 部材を独立変形部材とする。

（Case－1）　$R_{CD} = 1$　の時



$R_{CD} = 1$

図－7・34（b）

$\triangle SPE'$ より　$PE' = 20\,m$　　$\therefore C_1 = 20 - 5 = 15\,m$

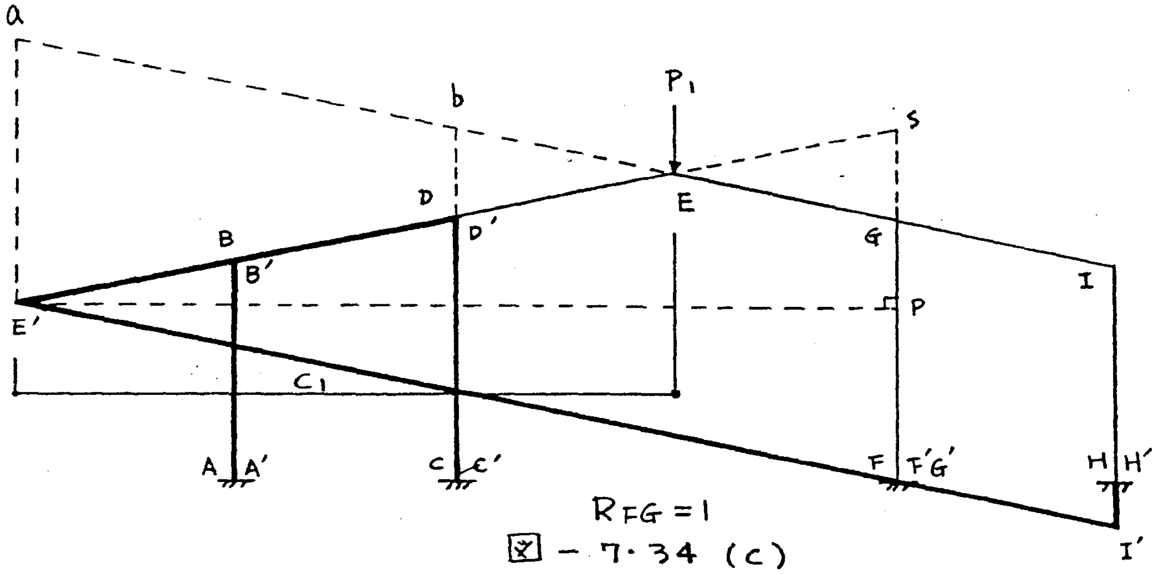
$R_{CD} = 1$　の時

$$R_{AB} = 1 + \frac{A'B'}{AB} = 1 + \frac{1}{5} = 1.2$$

$$R_{DE} = 1 - \frac{D'E'}{DE} = 1 - \frac{SD'}{SD} = 1 - \frac{8}{2} = -3.0$$

$$R_{EG} = 1 + \frac{E'G'}{EG} = \frac{EE'}{EG} = \frac{AE'}{bG} = \frac{6}{2} = 3$$

(Case－2)　$R_{FG}=1$ の時



図－7・34 (c)

$C_1 = 15\ m$

$R_{FG}=1$ の時

$$R_{DE} = 1 + \frac{D'E'}{DE} = \frac{EE'}{DE} = \frac{aE'}{bD} = \frac{6}{2} = 3.0$$

$$R_{EG} = 1 - \frac{E'G'}{EG} = 1 - \frac{SG'}{SG} = 1 - \frac{8}{2} = -3.0$$

$$R_{HI} = 1 + \frac{H'I'}{HI} = 1 + \frac{1}{5} = 1.2$$

部材角相互の関係

	Case－1 $R_{CD}=1$	Case－2 $R_{FG}=1$	部　材　角
A－B	1.2		$1.2\,\Psi_{CD}$
C－D	1.0		Ψ_{CD}
D－E	－3.0	3.0	$-3\Psi_{CD}+3\Psi_{FG}$
E－G	3.0	－3.0	$3\Psi_{CD}-3\Psi_{FG}$
F－G		1.0	Ψ_{FG}
H－I		1.2	$1.2\,\Psi_{FG}$

材端モーメント式

$$M_{AB} = \varphi_B + 1.2\,\psi_{CD}$$
$$M_{BA} = 2\varphi_B + 1.2\,\psi_{CD}$$
$$M_{BD} = 1.962\,\varphi_B + 0.981\,\varphi_D$$
$$M_{CD} = 0.833\,\varphi_D + 0.833\,\psi_{CD}$$
$$M_{DC} = 1.666\,\varphi_D + 0.833\,\psi_{CD}$$
$$M_{DB} = 0.981\,\varphi_B + 1.962\,\varphi_D$$
$$M_{DE} = 1.962\,\varphi_D + 0.981\,\varphi_E - 2.943\,\psi_{CD} + 2.943\,\psi_{FG}$$
$$M_{ED} = 0.981\,\varphi_D + 1.962\,\varphi_E - 2.943\,\psi_{CD} + 2.943\,\psi_{FG}$$
$$M_{EG} = 1.962\,\varphi_E + 0.981\,\varphi_G + 2.943\,\psi_{CD} - 2.943\,\psi_{FG}$$
$$M_{FG} = 0.833\,\varphi_G + 0.833\,\psi_{FG}$$
$$M_{GF} = 1.666\,\varphi_G + 0.833\,\psi_{FG}$$
$$M_{GE} = 0.981\,\varphi_E + 1.962\,\varphi_G + 2.943\,\psi_{CD} - 2.943\,\psi_{FG}$$
$$M_{GI} = 1.962\,\varphi_G + 0.981\,\varphi_I$$
$$M_{HI} = \varphi_I + 1.2\,\psi_{FG}$$
$$M_{IH} = 2\varphi_I + 1.2\,\psi_{FG}$$
$$M_{IG} = 0.981\,\varphi_G + 1.962\,\varphi_I$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0$ $\quad M_{BA} + M_{BD} = 0$

$$3.962\,\varphi_B + 0.981\,\varphi_D + 1.2\,\psi_{CD} = 0 \quad \text{------ (1)}$$

$\Sigma M_D = 0$ $\quad M_{DC} + M_{DB} + M_{DE} = 0$

$$0.981\,\varphi_B + 5.59\,\varphi_D + 0.981\,\varphi_E - 2.11\,\psi_{CD} + 2.943\,\psi_{FG} = 0 \quad \text{------ (2)}$$

$\Sigma M_E = 0$ $\quad M_{ED} + M_{EG} = 0$

$$0.981\,\varphi_D + 3.924\,\varphi_E + 0.981\,\varphi_G = 0 \quad \text{------ (3)}$$

$\Sigma M_G = 0$ $\quad M_{GF} + M_{GE} + M_{GI} = 0$

$$0.981\,\varphi_E + 5.59\,\varphi_G + 0.981\,\varphi_I + 2.943\,\psi_{CD} - 2.11\,\psi_{FG} = 0 \quad \text{----- (4)}$$

$\Sigma M_I = 0$ $\quad M_{IH} + M_{IG} = 0$

$$0.981\,\varphi_G + 3.962\,\varphi_I + 1.2\,\psi_{FG} = 0 \quad \text{----- (5)}$$

力のつり合い式

(Case − 1)

$\Sigma P \cdot C = -P_1 \cdot C_1 = -1.5 \times 15 = -22.5$

$(M_{CD}+M_{DC})\times 1 + (M_{AB}+M_{BA})\times 1.2 + (M_{DE}+M_{ED})\times(-3) + (M_{EG}+M_{GE})\times 3 - 22.5 = 0$

$3.6\varphi_B - 6.33\varphi_D + 8.829\varphi_G + 39.862\psi_{CD} - 35.316\psi_{FG} = 22.5$ ------- (6)

(Case − 2)

$\Sigma P \cdot C = 1.5 \times 15 = 22.5$

$(M_{FG}+M_{GF})\times 1 + (M_{DE}+M_{ED})\times 3 + (M_{EG}+M_{GE})\times(-3) + (M_{HI}+M_{IH})\times 1.2 + 22.5 = 0$

$8.829\varphi_D - 6.33\varphi_G + 3.6\varphi_I - 35.316\psi_{CD} + 39.862\psi_{FG} = -22.5$ ---- (7)

	φ_B	φ_D	φ_E	φ_G	φ_I	ψ_{CD}	ψ_{FG}	右辺
$\Sigma M_B=0$	3.962	0.981				1.2		0
$\Sigma M_D=0$	0.981	5.59	0.981			−2.11	2.943	0
$\Sigma M_E=0$		0.981	3.924	0.981				0
$\Sigma M_G=0$			0.981	5.59	0.981	2.943	−2.11	0
$\Sigma M_I=0$				0.981	3.962		1.2	0
Case−1	3.6	−6.33		8.829		39.862	−35.316	22.5
Case−2		8.829		−6.33	3.6	−35.316	39.862	−22.5

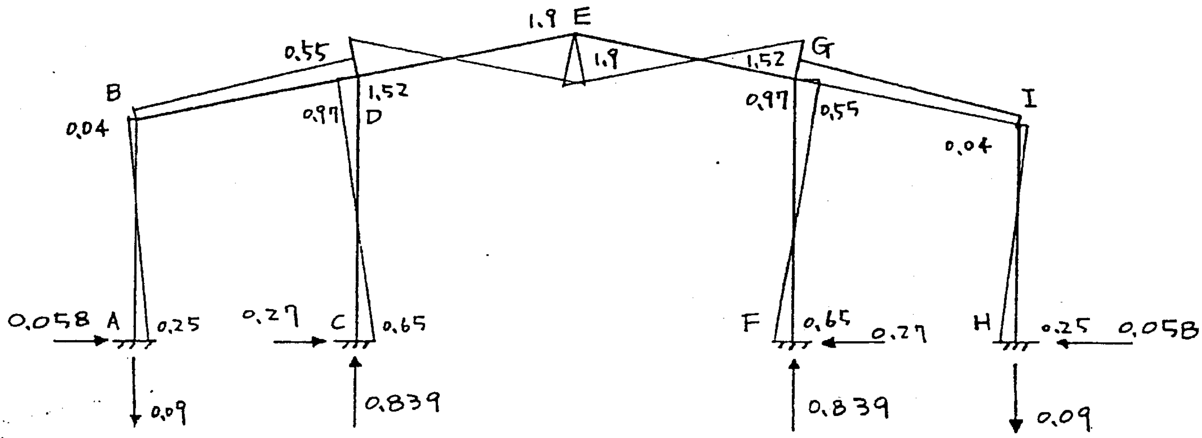
連立に解いて

$\varphi_B = -0.213$, $\varphi_D = 0.388$, $\varphi_E = 0$, $\varphi_G = -0.388$

$\varphi_I = 0.213$, $\psi_{CD} = 0.388$, $\psi_{FG} = -0.388$

材端モーメント式に代入する

$M_{AB} = -0.213 + 1.2 \times 0.388 = 0.25$ (tm)
$M_{BA} = -2 \times 0.213 + 1.2 \times 0.388 = 0.04$
$M_{BD} = -1.962 \times 0.213 + 0.981 \times 0.388 = -0.04$
$M_{CD} = 0.833 \times 0.388 + 0.833 \times 0.388 = 0.65$
$M_{DC} = 1.666 \times 0.388 + 0.833 \times 0.388 = 0.97$
$M_{DB} = -0.981 \times 0.213 + 1.962 \times 0.388 = 0.55$
$M_{DE} = 1.962 \times 0.388 - 2.943 \times 0.388 - 2.943 \times 0.388 = -1.52$
$M_{ED} = 0.981 \times 0.388 - 2.943 \times 0.388 - 2.943 \times 0.388 = -1.90$
$M_{EG} = -0.981 \times 0.388 + 2.943 \times 0.388 + 2.943 \times 0.388 = 1.90$
$M_{FG} = -0.833 \times 0.388 - 0.833 \times 0.388 = -0.65$
$M_{GF} = -1.666 \times 0.388 - 0.833 \times 0.388 = -0.97$
$M_{GE} = -1.962 \times 0.388 + 2.943 \times 0.388 + 2.943 \times 0.388 = 1.52$
$M_{GI} = -1.962 \times 0.388 + 0.981 \times 0.213 = -0.55$
$M_{HI} = 0.213 - 1.2 \times 0.388 = -0.25$
$M_{IH} = 2 \times 0.213 - 1.2 \times 0.388 = -0.04$
$M_{IG} = -0.981 \times 0.388 + 1.962 \times 0.213 = 0.04$

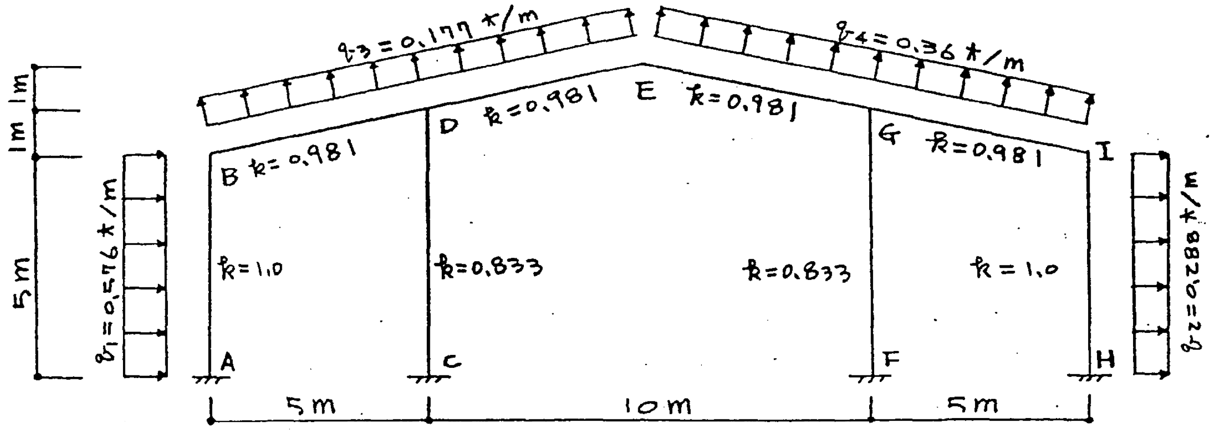


M − D
図−7・34(d)

反力の計算

B点のつり合い (B − A)
$-5H_A + 0.25 = -0.04$ ∴ $H_A = 0.058$ t (右)
D点のつり合い (D − C)
$-6H_A + 0.65 = -0.97$ ∴ $H_C = 0.27$ t (右)
D点のつり合い (D − B − A)
$-6 \times 0.058 + 0.25 - 5V_A = -0.55$ ∴ $V_A = 0.09$ t (下)
E点のつり合い (E点より左)
$-7 \times 0.058 - 10 \times 0.09 + 0.25 + 0.65 + 5V_C - 7 \times 0.27 = 1.9$
∴ $V_C = 0.839$ t (上)

(例題 7・25)　図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



図－7・35 (a)

(解)　部材角の関係は例題 7・24 に準ずる。

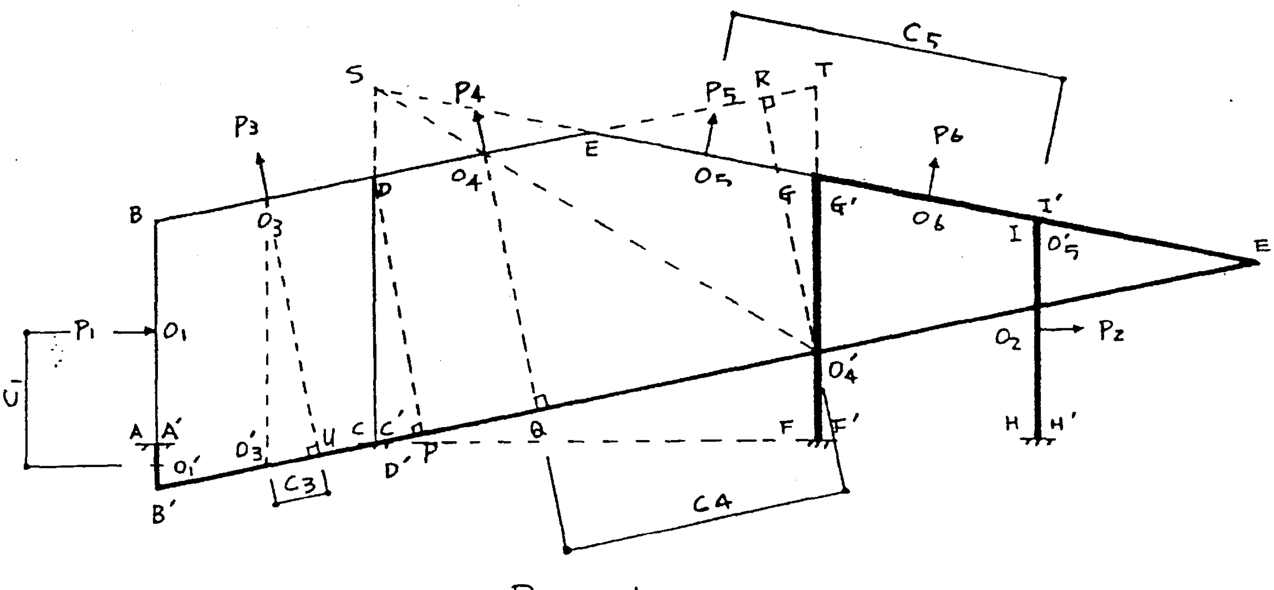
従って直角変位図より C を求める。

$P_1 = 0.576 \times 5 = 2.88$　　$P_4 = 0.177 \times 5.099 = 0.903\ t$

$P_2 = 0.288 \times 5 = 1.44$　　$P_5 = 0.36 \times 5.099 = 1.836\ t$

$P_3 = 0.177 \times 5.099 = 0.903\ t$　　$P_6 = 0.36 \times 5.099 = 1.836\ t$

(Case－1)



$R_{CD} = 1$

図－7・35 (b)

$C_1 = 3.0\ m$

△CDP ∽ △CFO'$_4$ であるから　$CD : CP = CO'_4 : FO'_4$

$6 : CP = 10.198 : 2$

$CP = 1.177\ m$

$C_3 = O_3'U = CP = 1.177\,m$

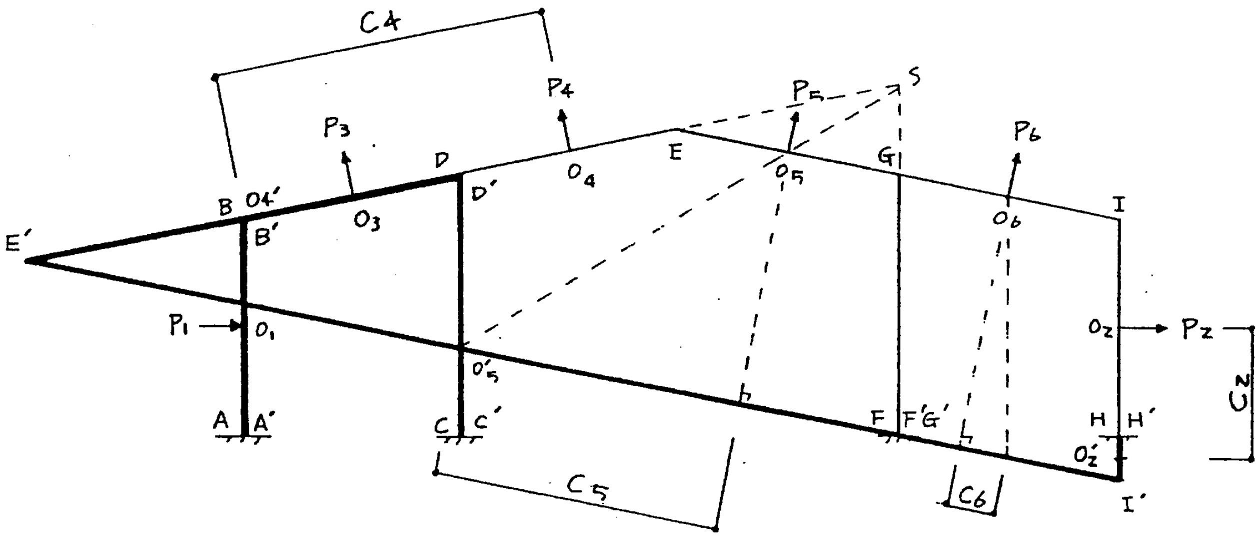
$C_4 = CO_4' - CP - PQ = 10.198 - 1.177 - \frac{1}{2} \times 5.099 = 6.472\,m$

△SCE'を考えてC5を求める

$EG = 5.009\ m \qquad SE' = 20.396\ m$

$C_5 = SE' - SE - EO_5 - IE' = 20.396 - 5.009 - \frac{1}{2} \times 5.009 = 7.649\ m$

(Case－2)



RGE＝1

図－7・35（c）

$C_2 = 3\ m \qquad C_4 = 7.649\ m \qquad C_5 = 6.472\ m$

$C_6 = 1.177\ m$

部材角相互の関係

	Case-1 $R_{CD}=1$	Case-2 $R_{FG}=1$	部　材　角
A－B	1.2		$1.2\,\Psi_{CD}$
C－D	1.0		Ψ_{CD}
D－E	-3.0	3.0	$-3\Psi_{CD} + 3\Psi_{FG}$
E－G	3.0	-3.0	$3\Psi_{CD} - 3\Psi_{FG}$
F－G		1.0	Ψ_{FG}
H－I		1.2	$1.2\,\Psi_{FG}$

C, M_0, Q_0 の計算

A－B部材

$$\begin{cases} C_{AB} = -\dfrac{0.576 \times 5^2}{12} = -1.2\ \mathrm{tm} = -C_{BA} \\ M_0 = \dfrac{0.576 \times 5^2}{8} = 1.8\ \mathrm{tm} \\ Q_0 = \dfrac{0.576 \times 5}{2} = 1.44\ \mathrm{t} \end{cases}$$

H－I部材

$$\begin{cases} C_{HI} = -\dfrac{0.288 \times 5^2}{12} = -0.6\ \mathrm{tm} = -C_{IH} \\ M_0 = \dfrac{0.288 \times 5^2}{8} = 0.9\ \mathrm{tm} \\ Q_0 = \dfrac{0.288 \times 5}{2} = 0.72\ \mathrm{t} \end{cases}$$

B－D，D－E部材

$$\begin{cases} C_{BD} = C_{DE} = \dfrac{0.177 \times 5.099^2}{12} = 0.383\ \mathrm{tm} = -C_{DB} = -C_{ED} \\ M_0 = \dfrac{0.177 \times 5.099^2}{8} = 0.575\ \mathrm{tm} \\ Q_0 = \dfrac{0.177 \times 5.099}{2} = 0.451\ \mathrm{t} \end{cases}$$

E－G，G－I部材

$$\begin{cases} C_{EG} = C_{GI} = \dfrac{0.36 \times 5.099^2}{12} = 0.78\ \mathrm{tm} = -C_{GE} = -C_{IG} \\ M_0 = \dfrac{0.36 \times 5.099^2}{8} = 1.17\ \mathrm{tm} \\ Q_0 = \dfrac{0.36 \times 5.099}{2} = 0.918\ \mathrm{t} \end{cases}$$

材端モーメント式

$$\begin{aligned}
M_{AB} &= \varphi_B + 1.2\,\psi_{CD} - 1.2 \\
M_{BA} &= 2\varphi_B + 1.2\,\psi_{CD} + 1.2 \\
M_{BD} &= 1.962\,\varphi_B + 0.981\,\varphi_D + 0.383 \\
M_{CD} &= 0.833\,\varphi_D + 0.833\,\psi_{CD} \\
M_{DC} &= 1.666\,\varphi_D + 0.833\,\psi_{CD} \\
M_{DB} &= 0.981\,\varphi_B + 1.962\,\varphi_D - 0.383 \\
M_{DE} &= 1.962\,\varphi_D + 0.981\,\varphi_E - 2.943\,\psi_{CD} + 2.943\,\psi_{FG} + 0.383 \\
M_{ED} &= 0.981\,\varphi_D + 1.962\,\varphi_E - 2.943\,\psi_{CD} + 2.943\,\psi_{FG} - 0.383 \\
M_{EG} &= 1.962\,\varphi_E + 0.981\,\varphi_G + 2.943\,\psi_{CD} - 2.943\,\psi_{FG} + 0.78 \\
M_{FG} &= 0.833\,\varphi_G + 0.833\,\psi_{FG} \\
M_{GF} &= 1.666\,\varphi_G + 0.833\,\psi_{FG} \\
M_{GE} &= 1.962\,\varphi_G + 0.981\,\varphi_E + 2.943\,\psi_{CD} - 2.943\,\psi_{FG} - 0.78 \\
M_{GI} &= 1.962\,\varphi_G + 0.981\,\varphi_I + 0.78 \\
M_{HI} &= \varphi_I + 1.2\,\psi_{FG} - 0.6
\end{aligned}$$

$$M_{IH} = 2\varphi_I + 1.2\,\psi_{FG} + 0.6$$
$$M_{IG} = 0.981\,\varphi_G + 1.962\,\varphi_I - 0.78$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0$ $\qquad M_{BA} + M_{BD} = 0$

$$3.962\,\varphi_B + 0.981\,\varphi_D + 1.2\,\psi_{CD} = -1.583 \quad \text{------ (1)}$$

$\Sigma M_D = 0$ $\qquad M_{DC} + M_{DB} + M_{DE} = 0$

$$0.981\,\varphi_B + 5.59\,\varphi_D + 0.981\,\varphi_E - 2.11\,\psi_{CD} + 2.943\,\psi_{FG} = 0 \quad \text{---- (2)}$$

$\Sigma M_E = 0$ $\qquad M_{ED} + M_{EG} = 0$

$$0.981\,\varphi_D + 3.924\,\varphi_E + 0.981\,\varphi_G = -0.397 \quad \text{------ (3)}$$

$\Sigma M_G = 0$ $\qquad M_{GF} + M_{GE} + M_{GI} = 0$

$$0.981\,\varphi_E + 5.59\,\varphi_G + 0.981\,\varphi_I + 2.943\,\psi_{CD} - 2.11\,\psi_{FG} = 0 \quad \text{--- (4)}$$

$\Sigma M_I = 0$ $\qquad M_{IH} + M_{IG} = 0$

$$0.981\,\varphi_G + 3.962\,\varphi_I + 1.2\,\psi_{FG} = 0.18 \quad \text{------ (5)}$$

力のつり合い式

(Case－1)

$$\Sigma P\cdot C = P_1\cdot C_1 + P_3\cdot C_3 + P_4\cdot C_4 + P_5\cdot C_5$$
$$= 2.88\times 3 - 0.903\times 1.177 + 0.903\times 6.472 + 1.836\times 7.649 = 27.465$$

$$(M_{CD}+M_{DC})\times 1 + (M_{AB}+M_{BA})\times 1.2 + (M_{DE}+M_{ED})\times(-3) + (M_{EG}+M_{GE})\times 3 + 27.465 = 0$$

$$3.6\,\varphi_B - 6.33\,\varphi_D + 8.829\,\varphi_G + 39.862\,\psi_{CD} - 35.316\,\psi_{FG} = -27.465 \quad \text{------ (6)}$$

(Case－2)

$$\Sigma P\cdot C = P_2\cdot C_2 + P_4\cdot C_4 + P_5\cdot C_5 + P_6\cdot C_6$$
$$= 1.44\times 3 - 0.903\times 7.649 - 1.836\times 6.472 + 1.836\times 1.17 = -12.309$$

$$(M_{FG}+M_{GF})\times 1 + (M_{DE}+M_{ED})\times 3 + (M_{EG}+M_{GE})\times(-3) + (M_{HI}+M_{IH})\times 1.2 - 12.309 = 0$$

$$8.829\varphi_D - 6.33\varphi_G + 3.6\varphi_I - 35.316\Psi_{CD} + 39.862\Psi_{FG} = 12.309 \quad \text{------} \ (7)$$

	φ_B	φ_D	φ_E	φ_G	φ_I	Ψ_{CD}	Ψ_{FG}	右 辺
$\Sigma M_B=0$	3.962	0.981				1.2		-1.583
$\Sigma M_D=0$	0.981	5.59	0.981			-2.11	2.943	0
$\Sigma M_E=0$		0.981	3.924	0.981				-0.397
$\Sigma M_G=0$			0.981	5.59	0.981	2.943	-2.11	0
$\Sigma M_I=0$				0.981	3.962			0.18
Case-1	3.6	-6.33		8.829		39.862	-35.316	-27.465
Case-2		8.829		-6.33	3.6	-35.316	39.862	12.309

連立に解いて

$\varphi_B = 0.342$,　$\varphi_D = 0.016$,　$\varphi_E = -0.248$,　$\varphi_G = 0.57$

$\varphi_I = 0.458$,　$\Psi_{CD} = -2.462$,　$\Psi_{FG} = -1.827$

材端モーメント式に代入する。

$M_{AB} = 0.342 - 1.2\times2.462 - 1.2 = -3.81$ (tm)

$M_{BA} = 2\times0.342 - 1.2\times2.462 + 1.2 = -1.07$

$M_{BD} = 1.962\times0.342 + 0.981\times0.016 + 0.383 = 1.07$

$M_{CD} = 0.833\times0.016 - 0.833\times2.462 = -2.04$

$M_{DC} = 1.666\times0.016 - 0.833\times2.462 = -2.02$

$M_{DB} = 0.981\times0.342 + 1.962\times0.016 - 0.383 = -0.02$

$M_{DE} = 1.962\times0.016 - 0.981\times0.248 + 2.943\times2.462 - 2.943\times1.827 + 0.383 = 2.04$

$M_{ED} = 0.981\times0.016 - 1.962\times0.248 + 2.943\times2.462 - 2.943\times1.827 - 0.383 = 1.02$

$M_{EG} = -1.962\times0.248 + 0.981\times0.57 - 2.943\times2.462 + 2.943\times1.827 + 0.78 = -1.02$

$M_{FG} = 0.833\times0.57 - 0.833\times1.827 = 1.05$

$M_{GF} = 1.666\times0.57 - 0.833\times1.827 = -0.57$

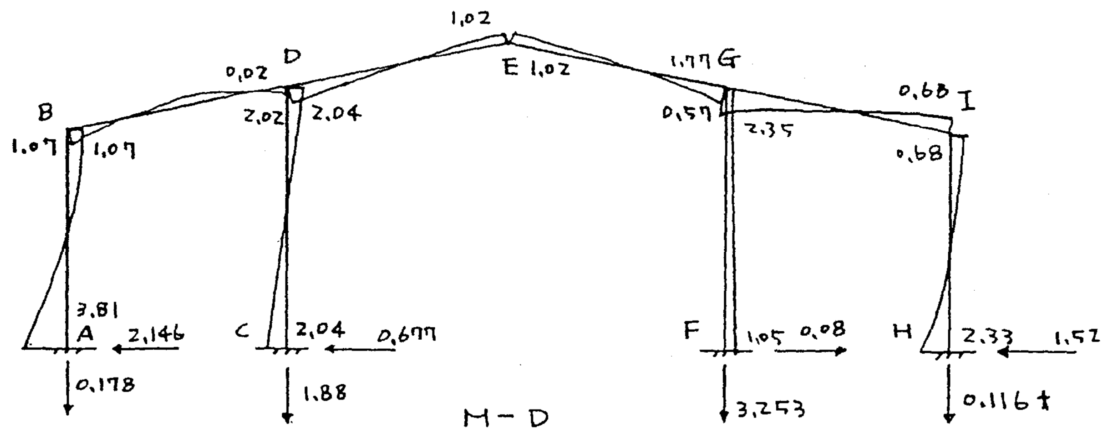
$M_{GE} = 1.962\times0.57 - 0.981\times0.248 - 2.943\times2.462 + 2.943\times1.827 - 0.78 = -1.77$

$M_{GI} = 1.962\times0.57 + 0.981\times0.458 + 0.78 = 2.35$

$M_{HI} = 0.458 - 1.2\times1.827 - 0.6 = -2.33$

$M_{IH} = 2\times0.458 - 1.2\times1.827 + 0.6 = -0.68$

$M_{IG} = 1.962\times0.458 + 0.981\times0.57 - 0.78 = 0.68$



M－D

図－7・35 (d)

反力の計算

B点のつり合い（B－A）

$5H_A - 3.81 - 2.88 \times 2.5 = 1.07$　　$\therefore H_A = 2.416$ t（左）

D点のつり合い（D－C）

$6H_C - 2.04 = 2.02$　　$\therefore H_C = 0.677$ t（左）

G点のつり合い（G－F）

$-6H_F + 1.05 = 0.57$　　$\therefore H_F = 0.08$ t（右）

I点のつり合い（I－H）

$5H_H - 2.33 - 1.836 \times 2.5 = 0.68$　　$\therefore H_H = 1.52$ t（左）

D点のつり合い（D－B－A）

$-5V_A - 3.81 + 2.416 \times 6 - 2.88 \times 3.5 + 0.903 \times 2.55 = 2.02$

$\therefore V_A = 0.178$ t（下）

E点のつり合い（E点より左）

$-0.178 \times 10 + 2.146 \times 7 - 3.81 - 2.04 + 0.677 \times 7 - 5V_C - 2.88 \times 4.5 + 0.903 \times 7.649$
$+ 0.903 \times 2.55 = -1.02$

$\therefore V_C = 1.88$ t（下）

G点のつり合い（G－I－H）

$5V_H + 1.52 \times 6 - 2.33 - 1.44 \times 3.5 - 1.836 \times 2.55 = -2.35$

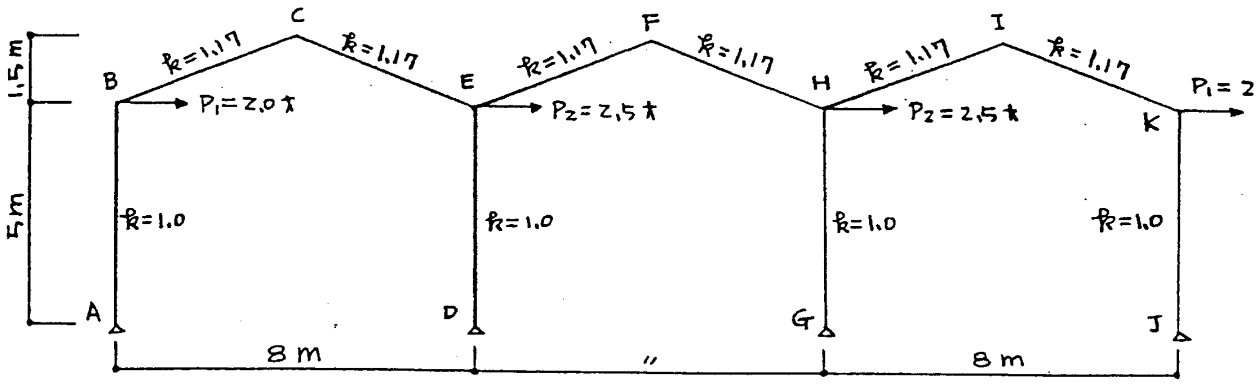
$\therefore V_H = 0.116$ t（下）

E点のつり合い（E点より右）

$1.52 \times 7 + 0.116 \times 10 - 2.33 - 0.08 \times 7 + 5V_F + 1.05 - 1.44 \times 4.5 - 1.836 \times 2.55$
$-1.836 \times 7.649 = 1.02$

$\therefore V_F = 3.253$ t（下）

(例題 7・26) 図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。

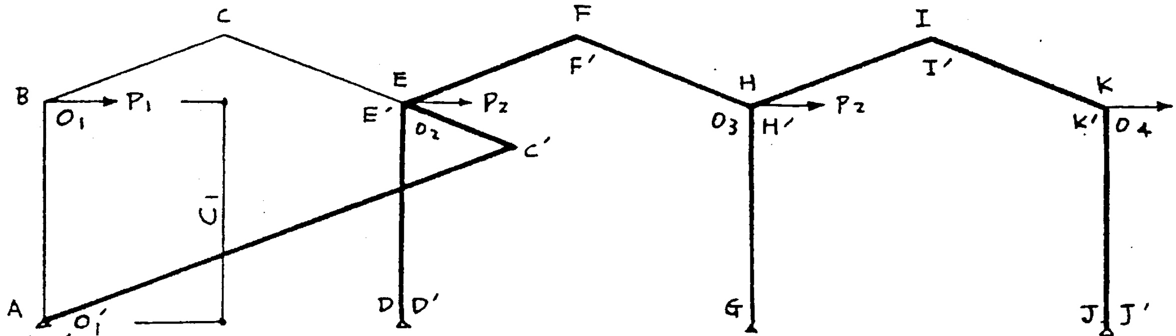


図－7・36 (a)

(解)　独立変形部材の数　$n = 10 - 2 \times 3 = 4$ 個

A－B, D－E, G－H, J－K 部材を独立変形部材とする。

(Case－1)　$R_{AB} = 1$ の時



$R_{AB} = 1$

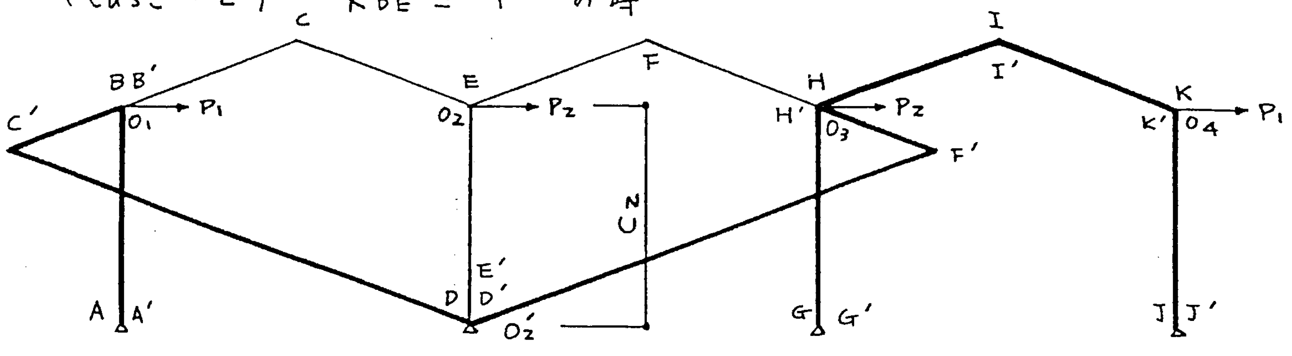
図－7・36 (b)

$c_1 = 5\,m$

$R_{AB} = 1$ の時

$$\left[\begin{array}{l} R_{BC} = 1 - \dfrac{B'C'}{BC} = -1.667 \\[2ex] R_{CE} = 1 + \dfrac{C'E'}{CE} = 1.667 \end{array}\right.$$

(Case－2)　$R_{DE}=1$　の時



$R_{DE}=1$

図－7・36 (c)

$C_2=5\ m$

$R_{DE}=1$　の時

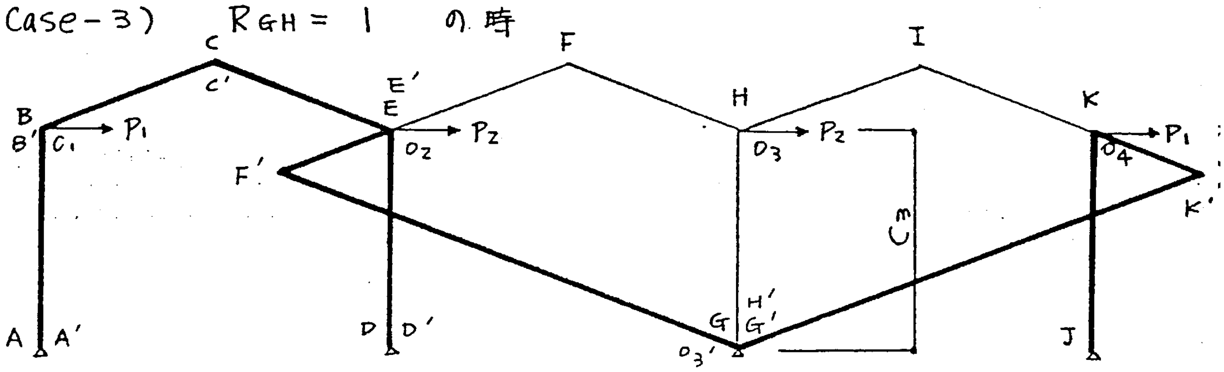
$R_{BC}=1.667$

$R_{CE}=-1.667$

$R_{EF}=-1.667$

$R_{FH}=1.667$

(Case－3)　$R_{GH}=1$　の時



$R_{GH}=1$

図－7・36 (d)

$C_3=5\ m$

$R_{GH}=1$ の時

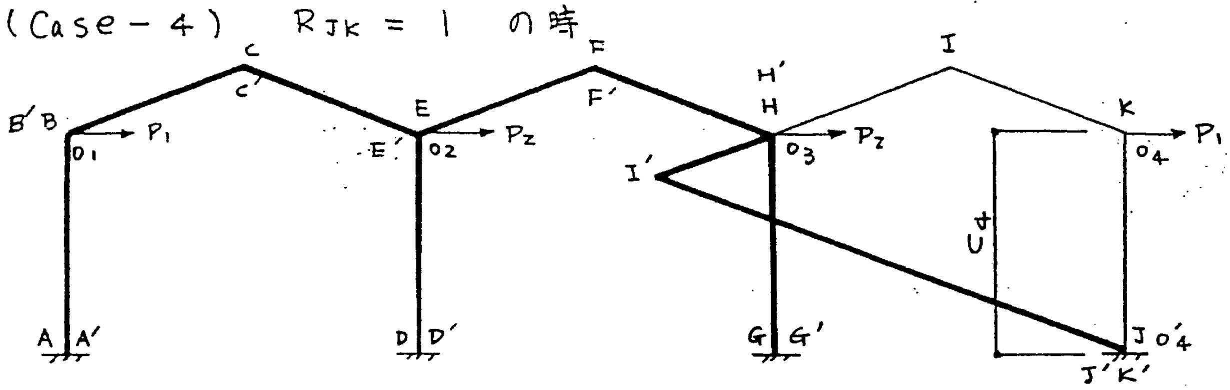
$R_{EF}=1.667$

$R_{FH}=-1.667$

$R_{HI}=-1.667$

$R_{IK}=1.667$

(Case－4)　$R_{JK}=1$ の時



$R_{JK}=1$
図－7.36 (d)

$C_4=5m$

$R_{JK}=1$ の時

$$\begin{cases} R_{HI}=1.667 \\ R_{IK}=-1.667 \end{cases}$$

部材角相互の関係

	Case－1 $R_{AB}=1$	Case－2 $R_{DE}=1$	Case－3 $R_{GH}=1$	Case－4 $R_{JK}=1$	部材角
A－B	1.0				ψ_{AB}
B－C	－1.667	1.667			$-1.667\psi_{AB}+1.667\psi_{DE}$
C－E	1.667	－1.667			$1.667\psi_{AB}-1.667\psi_{DE}$
D－E		1.0			ψ_{DE}
E－F		－1.667	1.667		$-1.667\psi_{DE}+1.667\psi_{GH}$
F－H		1.667	－1.667		$1.667\psi_{DE}-1.667\psi_{GH}$
G－H			1.0		ψ_{GH}
H－I			－1.667	1.667	$-1.667\psi_{GH}+1.667\psi_{JK}$
I－K			1.667	－1.667	$1.667\psi_{GH}-1.667\psi_{JK}$
J－K				1.0	ψ_{JK}

材端モーメント式

$M_{AB} = 0$
$M_{BA} = 1.5\varphi_B + 0.5\psi_{AB}$
$M_{BC} = 2.34\varphi_B + 1.17\varphi_C - 1.95\psi_{AB} + 1.95\psi_{DE}$
$M_{CB} = 1.17\varphi_B + 2.34\varphi_C - 1.95\psi_{AB} + 1.95\psi_{DE}$
$M_{CE} = 2.34\varphi_C + 1.17\varphi_E + 1.95\psi_{AB} - 1.95\psi_{DE}$
$M_{DE} = 0$
$M_{ED} = 1.5\varphi_E + 0.5\psi_{DE}$
$M_{EC} = 1.17\varphi_C + 2.34\varphi_E + 1.95\psi_{AB} - 1.95\psi_{DE}$
$M_{EF} = 2.34\varphi_E + 1.17\varphi_F - 1.95\psi_{DE} + 1.95\psi_{GH}$
$M_{FE} = 1.17\varphi_E + 2.34\varphi_F - 1.95\psi_{DE} + 1.95\psi_{GH}$
$M_{FH} = 2.34\varphi_F + 1.17\varphi_H + 1.95\psi_{DE} - 1.95\psi_{GH}$
$M_{GH} = 0$
$M_{HG} = 1.5\varphi_H + 0.5\psi_{GH}$
$M_{HF} = 1.17\varphi_F + 2.34\varphi_H + 1.95\psi_{DE} - 1.95\psi_{GH}$
$M_{HI} = 2.34\varphi_H + 1.17\varphi_I - 1.95\psi_{GH} + 1.95\psi_{JK}$
$M_{IH} = 1.17\varphi_H + 2.34\varphi_I - 1.95\psi_{GH} + 1.95\psi_{JK}$
$M_{IK} = 2.34\varphi_I + 1.17\varphi_K + 1.95\psi_{GH} - 1.95\psi_{JK}$
$M_{JK} = 0$
$M_{KJ} = 1.5\varphi_K + 0.5\psi_{JK}$
$M_{KI} = 1.17\varphi_I + 2.34\varphi_K + 1.95\psi_{GH} - 1.95\psi_{JK}$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0$ $\qquad M_{BA} + M_{BC} = 0$

$3.84\varphi_B + 1.17\varphi_C - 1.45\psi_{AB} + 1.95\psi_{DE} = 0$ ------- (1)

$\Sigma M_C = 0$ $\qquad M_{CB} + M_{CE} = 0$

$1.17\varphi_B + 4.68\varphi_C \div 1.17\varphi_E = 0$ ------- (2)

$\Sigma M_E = 0$ $\qquad M_{ED} + M_{EC} + M_{EF} = 0$

$1.17\varphi_C + 6.18\varphi_E + 1.17\varphi_F + 1.95\psi_{AB} - 3.4\psi_{DE} + 1.95\psi_{GH} = 0$ ------- (3)

$\Sigma M_F = 0$ $\qquad M_{FE} + M_{FH} = 0$

$1.17\varphi_E + 4.68\varphi_F + 1.17\varphi_H = 0$ ------- (4)

$\Sigma M_H = 0$ $\quad\quad M_{HG} + M_{HF} + M_{HI} = 0$

$$1.17\varphi_F + 6.18\varphi_H + 1.17\varphi_I + 1.95\psi_{DE} - 3.4\psi_{GH} + 1.95\psi_{JK} = 0 \quad \text{---} \ (5)$$

$\Sigma M_I = 0$ $\quad\quad M_{IH} + M_{IK} = 0$

$$1.17\varphi_H + 4.68\varphi_I + 1.17\varphi_K = 0 \quad \text{------} \ (6)$$

$\Sigma M_K = 0$ $\quad\quad M_{KI} + M_{KJ} = 0$

$$1.17\varphi_I + 3.84\varphi_K + 1.95\psi_{GH} - 1.45\psi_{JK} = 0 \quad \text{------} \ (7)$$

力のつり合い式

(Case－1)

$\Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_1 = 2 \times 5 = 10$

$$(M_{AB}+M_{BA})\times 1 + (M_{BC}+M_{CB})\times(-1.667) + (M_{CE}+M_{EC})\times 1.667 + 10 = 0$$
$$-4.351\varphi_B + 5.851\varphi_E + 13.503\psi_{AB} - 13.003\psi_{DE} = -10 \quad \text{------} \ (8)$$

(Case－2)

$\Sigma P \cdot C = P_2 \cdot C_2 = 2.5 \times 5 = 12.5$

$$(M_{DE}+M_{ED})\times 1 + (M_{BC}+M_{CB})\times 1.667 + (M_{CE}+M_{EC})\times(-1.667)$$
$$+ (M_{EF}+M_{FE})\times(-1.667) + (M_{FH}+M_{HF})\times 1.667 + 12.5 = 0$$
$$5.851\varphi_B - 10.202\varphi_E + 5.851\varphi_H - 13.003\psi_{AB} + 26.505\psi_{DE} - 13.003\psi_{GH}$$
$$= -12.5 \quad \text{------} \ (9)$$

(Case－3)

$\Sigma P \cdot C = P_2 \cdot C_3 = 2.5 \times 5 = 12.5$

$$(M_{GH}+M_{HG})\times 1 + (M_{EF}+M_{FE})\times 1.667 + (M_{FH}+M_{HF})\times(-1.667)$$
$$+ (M_{HI}+M_{IH})\times(-1.667) + (M_{IK}+M_{KI})\times 1.667 + 12.5 = 0$$
$$5.851\varphi_E - 10.202\varphi_H + 5.851\varphi_K - 13.003\psi_{DE} + 26.505\psi_{GH} - 13.003\psi_{JK}$$
$$= -12.5 \quad \text{------} \ (10)$$

(Case－4) $\quad \Sigma P \cdot C = P_1 \cdot C_4 = 2 \times 5 = 10$

$$(M_{JK}+M_{KJ})\times 1 + (M_{HI}+M_{IH})\times 1.667 + (M_{IK}+M_{KI})\times(-1.667) + 10 = 0$$
$$5.851\varphi_H - 4.351\varphi_K - 13.003\psi_{GH} + 13.503\psi_{JK} = -10 \quad \text{------} \ (11)$$

	φ_B	φ_C	φ_E	φ_F	φ_H	φ_I	φ_K	ψ_{AB}	ψ_{DE}	ψ_{GH}	ψ_{JK}	右辺
$\Sigma M_B=0$	3,84	1,17						-1,45	1,95			0
$\Sigma M_C=0$	1,17	4,68	1,17									0
$\Sigma M_E=0$		1,17	6,18	1,17				1,95	-3,4	1,95		0
$\Sigma M_F=0$			1,17	4,68	1,17							0
$\Sigma M_H=0$				1,17	6,18	1,17			1,95	-3,4	1,95	0
$\Sigma M_I=0$					1,17	4,68	1,17					0
$\Sigma M_K=0$						1,17	3,84			1,95	-1,45	0
Case-1	-4,351		5,851					13,503	-13,003			-10
Case-2	5,851		-10,202		5,851			-13,003	26,505	-13,003		-12,5
Case-3			5,851		-10,202		5,851		-13,003	26,505	-13,003	-12,5
Case-4					5,851		-4,351			-13,003	13,503	-10

連立に解いて

$\varphi_B = 5.957$, $\varphi_C = -2.35$, $\varphi_E = 3.442$, $\varphi_F = -1.721$, $\varphi_H = 3.442$, $\varphi_I = -2.35$

$\varphi_K = 5.957$, $\psi_{AB} = -36.105$, $\psi_{DE} = -37.168$, $\psi_{GH} = -37.168$, $\psi_{JK} = -36.105$

材端モーメント式に代入する

$M_{AB} = 0 \quad (\text{t·m})$

$M_{BA} = 1.5 \times 5.957 - 0.5 \times 36.105 = -9.12$

$M_{BC} = 2.34 \times 5.957 - 1.17 \times 2.35 + 1.95 \times 36.105 - 1.95 \times 37.168 = 9.12$

$M_{CB} = 1.17 \times 5.957 - 2.34 \times 2.35 + 1.95 \times 36.105 - 1.95 \times 37.168 = -0.6$

$M_{CE} = -2.34 \times 2.35 + 1.17 \times 3.442 - 1.95 \times 36.105 + 1.95 \times 37.168 = 0.6$

$M_{DE} = 0$

$M_{ED} = 1.5 \times 3.442 - 0.5 \times 37.168 = -13.42$

$M_{EC} = -1.17 \times 2.35 + 2.34 \times 3.442 - 1.95 \times 36.105 + 1.95 \times 37.168 = 7.38$

$M_{EF} = 2.34 \times 3.442 - 1.17 \times 1.721 + 1.95 \times 37.168 - 1.95 \times 37.168 = 6.04$

$M_{FE} = 1.17 \times 3.442 - 2.34 \times 1.721 + 1.95 \times 37.168 - 1.95 \times 37.168 = 0$

$M_{FH} = -2.34 \times 1.721 + 1.17 \times 3.442 - 1.95 \times 37.168 + 1.95 \times 37.168 = 0$

$M_{GH} = 0$

$M_{HG} = 1.5 \times 3.442 - 0.5 \times 37.168 = -13.42$

$M_{HF} = -1.17 \times 1.721 + 2.34 \times 3.442 - 1.95 \times 37.168 + 1.95 \times 37.168 = 6.04$

$M_{HI} = 2.34 \times 3.442 - 1.17 \times 2.35 + 1.95 \times 37.168 - 1.95 \times 36.105 = 7.38$

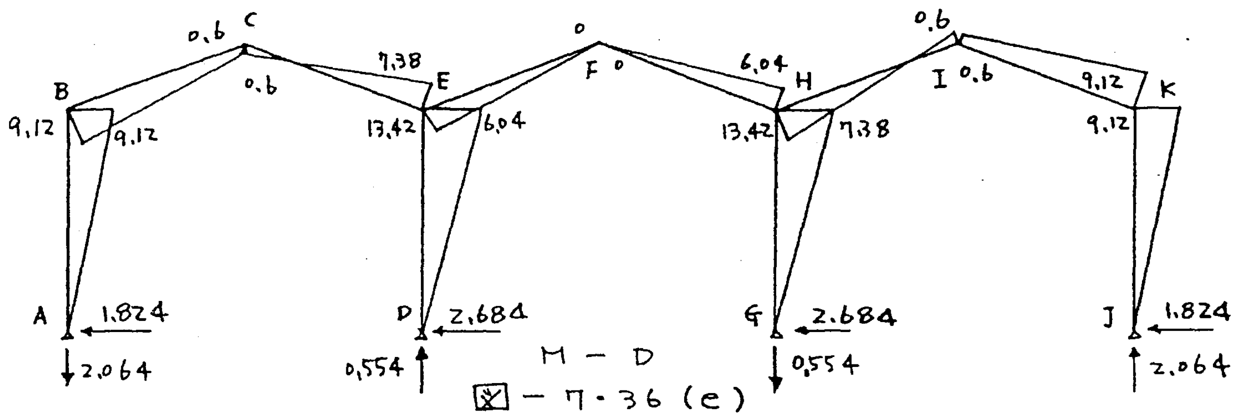
$M_{IH} = 1.17 \times 3.442 - 2.34 \times 2.35 + 1.95 \times 37.168 - 1.95 \times 36.105 = 0.6$

$M_{IK} = -2.34 \times 2.35 + 1.17 \times 5.957 - 1.95 \times 37.168 + 1.95 \times 36.105 = -0.6$

$M_{JK} = 0$

$M_{KJ} = 1.5 \times 5.957 - 0.5 \times 36.105 = -9.12$

$M_{KI} = -1.17 \times 2.35 + 2.34 \times 5.957 - 1.95 \times 37.168 + 1.95 \times 36.105 = 9.12$



M − D

図−7・36 (e)

反力の計算

B点のつり合い（B − A）

$5H_A = 9.12 \qquad \therefore H_A = 1.824$ t（左）

E点のつり合い（E − D）

$5H_D = 13.42 \qquad \therefore H_D = 2.684$ t（左）

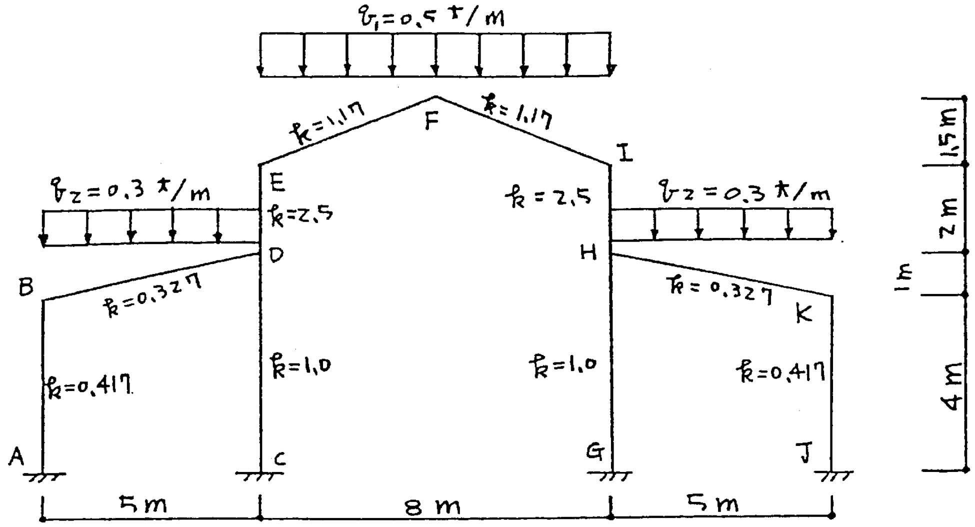
C点のつり合い（C − B − A）

$6.5 \times 1.824 - 4V_A - 1.5 \times 2 = 0.6 \qquad \therefore V_A = 2.064$ t（下）

F点のつり合い

$6.5 \times 1.824 - 12 \times 2.064 + 6.5 \times 2.684 + 4V_D - 2 \times 1.5 - 2.5 \times 15 = 0 \qquad \therefore V_D = 0.554$ t（上）

(例題7・27) 図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



図－7・37 (a)

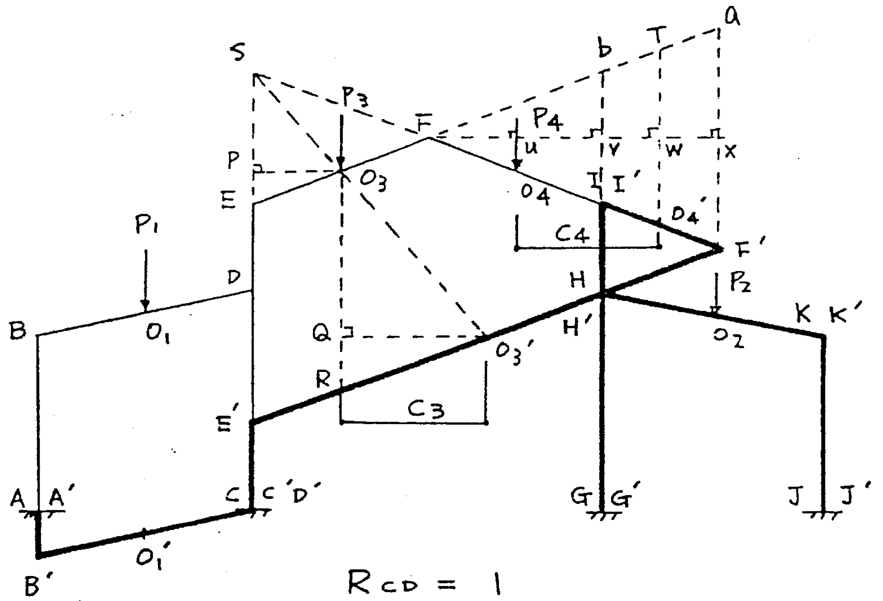
(解)　独立変形部材の数　　$n = 10 - 2 \times 3 = 4$ 個

C－D，D－E，G－H，H－I を独立変形部材とする。

$P_1 = 0.3 \times 5 = 1.5$ t $= P_2$

$P_3 = 0.5 \times 4 = 2$ t $= P_4$

(Case－1)　$R_{CD} = 1$ の時



$R_{CD} = 1$

図－7・37 (b)

C_3 を求める

$\triangle SEO_3 \backsim \triangle O_3RO_3'$　また　$O_3P = 2.0\,m$ であるから

$$SE : O_3P = O_3R : O_3'Q$$
$$3 : 2 = 5 : O_3'Q$$
$$O_3'Q = 3.333\,m = C_3$$

C_4 を求める

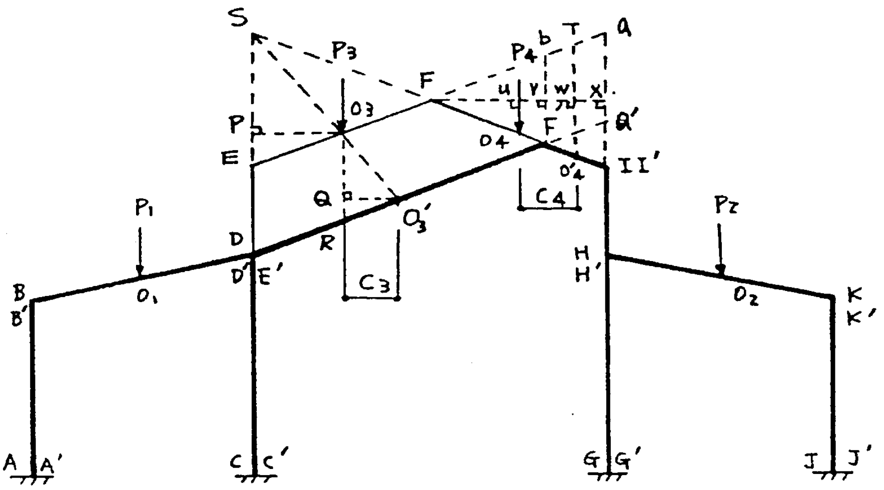
$Ib = 3.0\,m$　$F'a = 5.0\,m$　従って　$O_4'W = 2.0\,m$

$$FV : VI = FW : WO_4'$$
$$4 : 1.5 = FW : 2$$
$$FW = 5.333\,m$$
$$C_4 = FW - FU = 5.333 - 2 = 3.333\,m$$

$R_{CD} = 1$　の時

$$\left[\begin{array}{l} R_{AB} = 1 + \dfrac{A'B'}{AB} = 1 + \dfrac{1}{4} = 1.25 \\ R_{EF} = 1 - \dfrac{E'F'}{EF} = 1 - \dfrac{S'E'}{SE} = 1 - \dfrac{8}{3} = -1.667 \\ R_{FI} = 1 + \dfrac{F'I'}{FI} = \dfrac{FF'}{FI} = \dfrac{aF'}{bI} = \dfrac{5}{3} = 1.667 \end{array}\right.$$

(Case－2)　$R_{DE} = 1$　の時



$R_{DE} = 1$

図－7・37 (c)

C_3 を求める

$\triangle SEO_3 \backsim \triangle O_3RO_3'$　また　$O_3P = 2\,m$ であるから

$$SE : O_3P = O_3R : O_3'Q$$
$$3 : 2 = 2 : O_3'Q$$
$$Q_3'Q = 1.333\,m = C_3$$

C_4 を求める　$Ia = 3\,m$　$F'b = 2\,m$　従って　$O_4'W = 1.25\,m$

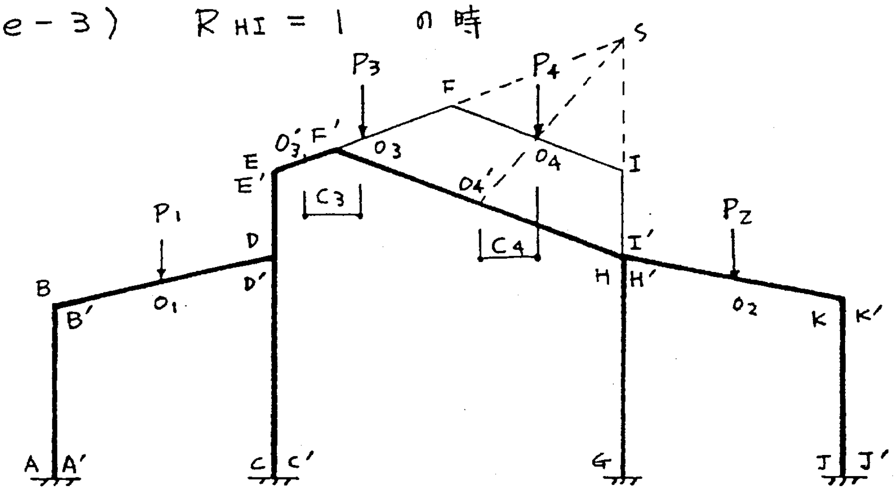
$$FX : IX = FW : WO_4'$$
$$4 : 1.5 = FW : 1.25 \qquad FW = 3.333\,m$$
$$C_4 = FW - FU = 3.333 - 2 = 1.333\,m$$

$R_{DE} = 1$ の時

$$R_{EF} = 1 - \frac{E'F'}{EF} = 1 - \frac{S'E'}{SE} = 1 - \frac{5}{3} = -0.667$$

$$R_{FI} = 1 - \frac{F'I'}{FI} = 1 - \frac{a'I'}{aI} = 1 - \frac{1}{3} = 0.667$$

(Case－3)　$R_{HI} = 1$ の時



$R_{HI} = 1$

図－7・37 (d)

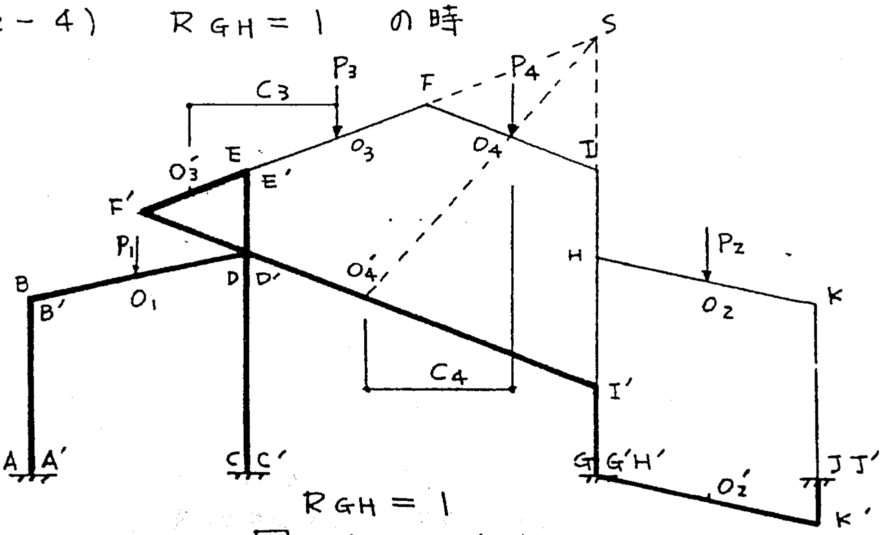
$C_3 = C_4 = 1.333$ m

$R_{HI} = 1$ の時

$R_{EF} = 0.667$

$R_{FI} = -0.667$

(Case－4)　$R_{GH} = 1$ の時



$R_{GH} = 1$

図－7・37 (e)

$C_3 = C_4 = 3.333$ m

$R_{GH} = 1$ の時

$$\left[\begin{array}{l} R_{EF} = 1.667 \\ R_{FI} = -1.667 \\ R_{JK} = 1.25 \end{array}\right.$$

部材角相互の関係

	Case−1 $R_{CD}=1$	Case−2 $R_{DE}=1$	Case−3 $R_{HI}=1$	Case−4 $R_{GH}=1$	部材角
A − B	1.25				$1.25\psi_{CD}$
C − D	1.0				ψ_{CD}
D − E		1.0			ψ_{DE}
E − F	−1.667	−0.667	0.667	1.667	$-1.667\psi_{CD}-0.667\psi_{DE}+0.667\psi_{HI}+1.667\psi_{GH}$
G − H				1.0	ψ_{GH}
H − I			1.0		ψ_{HI}
F − I	1.667	0.667	−0.667	−1.667	$1.667\psi_{CD}+0.667\psi_{DE}-0.667\psi_{HI}-1.667\psi_{GH}$
J − K				1.25	$1.25\psi_{GH}$

C, M_0, Q_0 の計算

B − D, H − K 部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{BD} = C_{HK} = -\dfrac{0.3\times 5^2}{12} = -0.625\ \text{tm} = -C_{DB} = -C_{KH} \\ M_0 = \dfrac{0.3\times 5^2}{8} = 0.938\ \text{tm} \\ Q_0 = \dfrac{0.3\times 5}{2} = 0.75\ \text{t} \end{array}\right.$$

E − F, F − I 部材

$$\left[\begin{array}{l} C_{EF} = C_{FI} = -\dfrac{0.5\times 4^2}{12} = -0.667\ \text{tm} = -C_{FE} = -C_{IF} \\ M_0 = \dfrac{0.5\times 4^2}{8} = 1.0\ \text{tm} \\ Q_0 = \dfrac{0.5\times 4}{2} = 1.0\ \text{t} \end{array}\right.$$

材端モーメント式

$$M_{AB} = 0.417(\varphi_B + 1.25\psi_{CD}) = 0.417\varphi_B + 0.521\psi_{CD}$$
$$M_{BA} = 0.417(2\varphi_B + 1.25\psi_{CD}) = 0.834\varphi_B + 0.521\psi_{CD}$$
$$M_{BD} = 0.327(2\varphi_B + \varphi_D) - 0.625 = 0.654\varphi_B + 0.327\varphi_D - 0.625$$
$$M_{CD} = 1.0(\varphi_D + \psi_{CD}) = \varphi_D + \psi_{CD}$$
$$M_{DC} = 1.0(2\varphi_D + \psi_{CD}) = 2\varphi_D + \psi_{CD}$$

$$M_{DB} = 0.327\,(2\varphi_D + \varphi_B) + 0.625 = 0.327\,\varphi_B + 0.654\,\varphi_D + 0.625$$
$$M_{DE} = 2.5\,(2\varphi_D + \varphi_E + \psi_{DE}) = 5\varphi_D + 2.5\,\varphi_E + 2.5\,\psi_{DE}$$
$$M_{ED} = 2.5\,(2\varphi_E + \varphi_D + \psi_{DE}) = 2.5\,\varphi_D + 5\,\varphi_E + 2.5\,\psi_{DE}$$
$$M_{EF} = 1.17\,(2\varphi_E + \varphi_F - 1.667\,\psi_{CD} - 0.667\,\psi_{DE} + 0.667\,\psi_{HI} + 1.667\,\psi_{GH}) - 0.667$$
$$= 2.34\,\varphi_E + 1.17\,\varphi_F - 1.95\,\psi_{CD} - 0.78\,\psi_{DE} + 0.78\,\psi_{HI} + 1.95\,\psi_{GH} - 0.667$$
$$M_{FE} = 1.17\,(2\varphi_F + \varphi_E - 1.667\,\psi_{CD} - 0.667\,\psi_{DE} + 0.667\,\psi_{HI} + 1.667\,\psi_{GH}) + 0.667$$
$$= 1.17\,\varphi_E + 2.34\,\varphi_F - 1.95\,\psi_{CD} - 0.78\,\psi_{DE} + 0.78\,\psi_{HI} + 1.95\,\psi_{GH} + 0.667$$
$$M_{FI} = 1.17\,(2\varphi_F + \varphi_I + 1.667\,\psi_{CD} + 0.667\,\psi_{DE} - 0.667\,\psi_{HI} - 1.667\,\psi_{GH}) - 0.667$$
$$= 2.34\,\varphi_F + 1.17\,\varphi_I + 1.95\,\psi_{CD} + 0.78\,\psi_{DE} - 0.78\,\psi_{HI} - 1.95\,\psi_{GH} - 0.667$$
$$M_{GH} = 1.0\,(\varphi_H + \psi_{GH}) = \varphi_H + \psi_{GH}$$
$$M_{HG} = 1.0\,(2\varphi_H + \psi_{GH}) = 2\varphi_H + \psi_{GH}$$
$$M_{HK} = 0.327\,(2\varphi_H + \varphi_K) - 0.625 = 0.654\,\varphi_H + 0.327\,\varphi_K - 0.625$$
$$M_{HI} = 2.5\,(2\varphi_H + \varphi_I + \psi_{HI}) = 5\varphi_H + 2.5\,\varphi_I + 2.5\,\psi_{HI}$$
$$M_{IH} = 2.5\,(2\varphi_I + \varphi_H + \psi_{HI}) = 2.5\,\varphi_H + 5\,\varphi_I + 2.5\,\psi_{HI}$$
$$M_{IF} = 1.17\,(2\varphi_I + \varphi_F + 1.667\,\psi_{CD} + 0.667\,\psi_{DE} - 0.667\,\psi_{HI} - 1.667\,\psi_{GH}) + 0.667$$
$$= 1.17\,\varphi_F + 2.34\,\varphi_I + 1.95\,\psi_{CD} + 0.78\,\psi_{DE} - 0.78\,\psi_{HI} - 1.95\,\psi_{GH} + 0.667$$
$$M_{JK} = 0.417\,(\varphi_K + 1.25\,\psi_{GH}) = 0.417\,\varphi_K + 0.521\,\psi_{GH}$$
$$M_{KJ} = 0.417\,(2\varphi_K + 1.25\,\psi_{GH}) = 0.834\,\varphi_K + 0.521\,\psi_{GH}$$
$$M_{KH} = 0.327\,(2\varphi_K + \varphi_H) + 0.625 = 0.654\,\varphi_K + 0.327\,\varphi_H + 0.625$$

節点方程式

$\Sigma M_B = 0$ $\qquad M_{BA} + M_{BD} = 0$

$$1.488\,\varphi_B + 0.327\,\varphi_D + 0.521\,\psi_{CD} = 0.625 \qquad \text{-------}\ (1)$$

$\Sigma M_D = 0$ $\qquad M_{DC} + M_{DB} + M_{DE} = 0$

$$0.327\,\varphi_B + 7.654\,\varphi_D + 2.5\,\varphi_E + \psi_{CD} + 2.5\,\psi_{DE} = -0.625 \qquad \text{------}\ (2)$$

$\Sigma M_E = 0$ $\qquad M_{ED} + M_{EF} = 0$

$$2.5\,\varphi_D + 7.34\,\varphi_E + 1.17\,\varphi_F - 1.95\,\psi_{CD} + 1.72\,\psi_{DE} + 0.78\,\psi_{HI} + 1.95\,\psi_{GH} = 0.667 \qquad \text{------}\ (3)$$

$\Sigma M_F = 0$ $\qquad M_{FE} + M_{FI} = 0$

$$1.17\,\varphi_E + 4.68\,\varphi_F + 1.17\,\varphi_I = 0 \qquad \text{------}\ (4)$$

$\Sigma M_I = 0$ $\qquad M_{IH} + M_{IF} = 0$

$$1.17\,\varphi_F + 2.5\,\varphi_H + 7.34\,\varphi_I + 1.95\,\psi_{CD} + 0.78\,\psi_{DE} + 1.72\,\psi_{HI} - 1.95\,\psi_{GH} = -0.667 \qquad \text{------}\ (5)$$

$\Sigma M_H = 0 \qquad M_{HG} + M_{HK} + M_{HI} = 0$

$$7.654\varphi_H + 2.5\varphi_I + 0.327\varphi_K + \Psi_{GH} + 2.5\Psi_{HI} = 0.625 \quad ------- (6)$$

$\Sigma M_K = 0 \qquad M_{KJ} + M_{KH} = 0$

$$0.327\varphi_H + 1.488\varphi_K + 0.521\Psi_{GH} = -0.625 \quad ------ (7)$$

力のつり合い式

(Case－1)

$$\Sigma P \cdot C = P_3 \cdot C_3 + P_4 \cdot C_4 = -2 \times 3.333 - 2 \times 3.333 = -13.332$$

$$(M_{CD} + M_{DC}) \times 1 + (M_{AB} + M_{BA}) \times 1.25 + (M_{EF} + M_{FE}) \times (-1.667) + (M_{FI} + M_{IF}) \times 1.667 - 13.332 = 0$$

$$1.564\varphi_B + 3\varphi_D - 5.851\varphi_E + 5.851\varphi_I + 16.305\Psi_{CD} + 5.201\Psi_{DE} - 5.201\Psi_{HI} - 13.003\Psi_{GH} = 13.332 \quad ------ (8)$$

(Case－2)

$$\Sigma P \cdot C = P_3 \cdot C_3 + P_4 \cdot C_4 = -2 \times 1.333 - 2 \times 1.333 = -5.332$$

$$(M_{DE} + M_{ED}) \times 1 + (M_{EF} + M_{FE}) \times (-0.667) + (M_{FI} + M_{IF}) \times 0.667 - 5.332 = 0$$

$$7.5\varphi_D + 5.159\varphi_E + 2.341\varphi_I + 5.203\Psi_{CD} + 7.081\Psi_{DE} - 2.081\Psi_{HI} - 5.203\Psi_{GH} = 5.332 \quad ------ (9)$$

(Case－3)

$$\Sigma P \cdot C = P_3 \cdot C_3 + P_4 \cdot C_4 = 2 \times 1.333 + 2 \times 1.333 = 5.332$$

$$(M_{HI} + M_{IH}) \times 1 + (M_{EF} + M_{FE}) \times 0.667 + (M_{FI} + M_{IF}) \times (-0.667) + 5.332 = 0$$

$$2.341\varphi_E + 7.5\varphi_H + 5.159\varphi_I - 5.203\Psi_{CD} - 2.081\Psi_{DE} + 7.081\Psi_{HI} + 5.203\Psi_{GH} = -5.332 \quad ---- (10)$$

(Case－4)

$$\Sigma P \cdot C = P_3 \cdot C_3 + P_4 \cdot C_4 = 2 \times 3.333 + 2 \times 3.333 = 13.332$$

$$(M_{GH} + M_{HG}) \times 1 + (M_{EF} + M_{FE}) \times 1.667 + (M_{FI} + M_{IF}) \times (-1.667) + (M_{JK} + M_{KJ}) \times 1.25 + 13.332 = 0$$

$$5.851\varphi_E + 3\varphi_H - 5.851\varphi_I + 1.564\varphi_K - 13.003\Psi_{CD} - 5.201\Psi_{DE} + 5.201\Psi_{HI} + 16.305\Psi_{GH} = -13.332 \quad ---- (11)$$

	φ_B	φ_D	φ_E	φ_F	φ_I	φ_H	φ_K	ψ_{CD}	ψ_{DE}	ψ_{HI}	ψ_{GH}	右辺
$\Sigma M_B=0$	1.488	0.327						0.521				0.625
$\Sigma M_D=0$	0.327	7.654	2.5					1	2.5			-0.625
$\Sigma M_E=0$		2.5	7.34	1.17				-1.95	1.72	0.78	1.95	0.667
$\Sigma M_F=0$			1.17	4.68	1.17							0
$\Sigma M_I=0$				1.17	7.34	2.5		1.95	0.78	1.72	-1.95	-0.667
$\Sigma M_H=0$					2.5	7.654	0.327			2.5	1	0.625
$\Sigma M_K=0$						0.327	1.488				0.521	-0.625
Case-1	1.564	3	-5.851		5.851			16.305	5.201	-5.201	-13.003	13.332
Case-2		7.5	5.159		2.341			5.203	7.081	-2.081	-5.203	5.332
Case-3			2.341		5.159	7.5		-5.203	-2.081	7.081	5.203	-5.332
Case-4			5.851		-5.851	3	1.564	-13.003	-5.201	5.201	16.305	-13.332

連立に解いて

$\varphi_B = 0.149$, $\varphi_D = -0.301$, $\varphi_E = 0.77$, $\varphi_F = 0$, $\varphi_I = -0.77$, $\varphi_H = 0.301$

$\varphi_K = -0.149$, $\psi_{CD} = 0.963$, $\psi_{DE} = -0.503$, $\psi_{HI} = 0.503$, $\psi_{GH} = -0.963$

材端モーメント式に代入する

$M_{AB} = 0.417 \times 0.149 + 0.521 \times 0.963 = 0.56$ (tm)

$M_{BA} = 0.834 \times 0.149 + 0.521 \times 0.963 = 0.63$

$M_{BD} = 0.654 \times 0.149 - 0.327 \times 0.301 - 0.625 = -0.63$

$M_{CD} = -0.301 + 0.963 = 0.66$

$M_{DC} = -2 \times 0.301 + 0.963 = 0.36$

$M_{DB} = 0.327 \times 0.149 - 0.654 \times 0.301 + 0.625 = 0.48$

$M_{DE} = -5 \times 0.301 + 2.5 \times 0.77 - 2.5 \times 0.503 = -0.84$

$M_{ED} = -2.5 \times 0.301 + 5 \times 0.77 - 2.5 \times 0.503 = 1.84$

$M_{EF} = 2.34 \times 0.77 - 1.95 \times 0.963 + 0.78 \times 0.503 + 0.78 \times 0.503 - 1.95 \times 0.963$
$\quad - 0.667 = -1.84$

$M_{FI} = -1.17 \times 0.77 + 1.95 \times 0.963 - 0.78 \times 0.503 - 0.78 \times 0.503 + 1.95 \times 0.963$
$\quad - 0.667 = -0.48$

$M_{GH} = 0.301 - 0.963 = -0.66$

$M_{HG} = 2 \times 0.301 - 0.963 = -0.36$

$M_{HK} = 0.654 \times 0.301 - 0.327 \times 0.149 - 0.625 = -0.48$

$M_{HI} = 5 \times 0.301 - 2.5 \times 0.77 + 2.5 \times 0.503 = 0.84$

$M_{IH} = 2.5 \times 0.301 - 5 \times 0.77 + 2.5 \times 0.503 = -1.84$

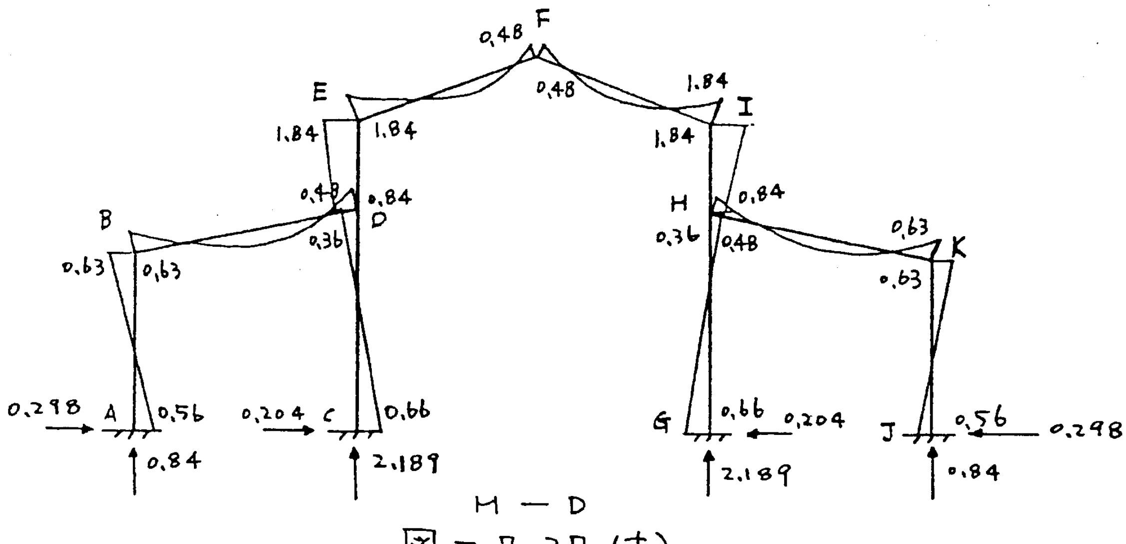
$M_{IF} = -2.34 \times 0.77 + 1.95 \times 0.963 - 0.78 \times 0.503 - 0.78 \times 0.503 + 1.95 \times 0.96$
$\quad + 0.667 = 1.84$

$M_{JK} = -0.417 \times 0.149 - 0.521 \times 0.963 = -0.56$

$M_{KJ} = -0.834 \times 0.149 - 0.521 \times 0.963 = -0.63$

$M_{KH} = -0.654 \times 0.149 + 0.327 \times 0.301 + 0.625 = 0.63$

$M_{FE} = 1.17 \times 0.77 - 1.95 \times 0.963 + 0.78 \times 0.503 + 0.78 \times 0.503 - 1.95 \times 0.963 + 0.667 = 0.48$



M — D

図－7・37 (す)

反力の計算

B点のつり合い（B－A）

$-4H_A + 0.56 = -0.63$　　　∴ $H_A = 0.298$ t（右）

D点のつり合い（D－C）

$-5H_C + 0.66 = -0.36$　　　∴ $H_C = 0.204$ t（右）

D点のつり合い（D－B－A）

$5V_A - 5 \times 0.298 + 0.56 - 1.5 \times 2.5 = -0.48$

∴ $V_A = 0.84$ t（上）

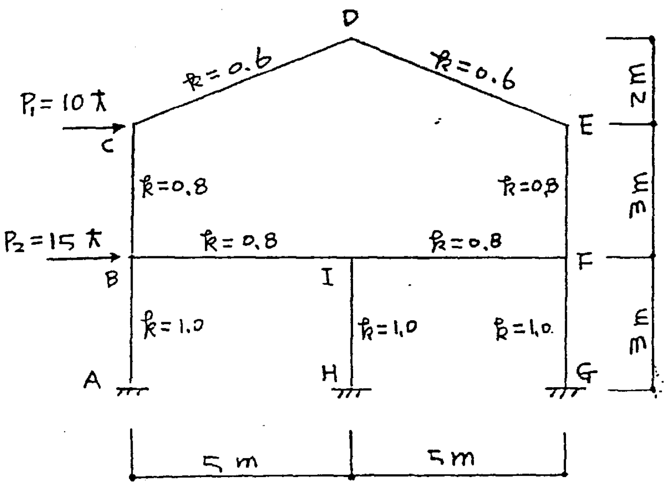
F点のつり合い（F点より左）

$-8.5 \times 0.298 + 0.84 \times 9 + 0.56 - 1.5 \times 6.5 - 8.5 \times 0.204 + 0.66 + 4V_C - 2 \times 2 = -0.48$

∴ $V_C = 2.189$ t（上）

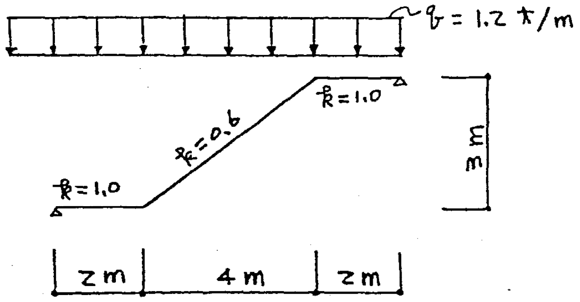
―― 練習問題 ――

（問題 7・1）　図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



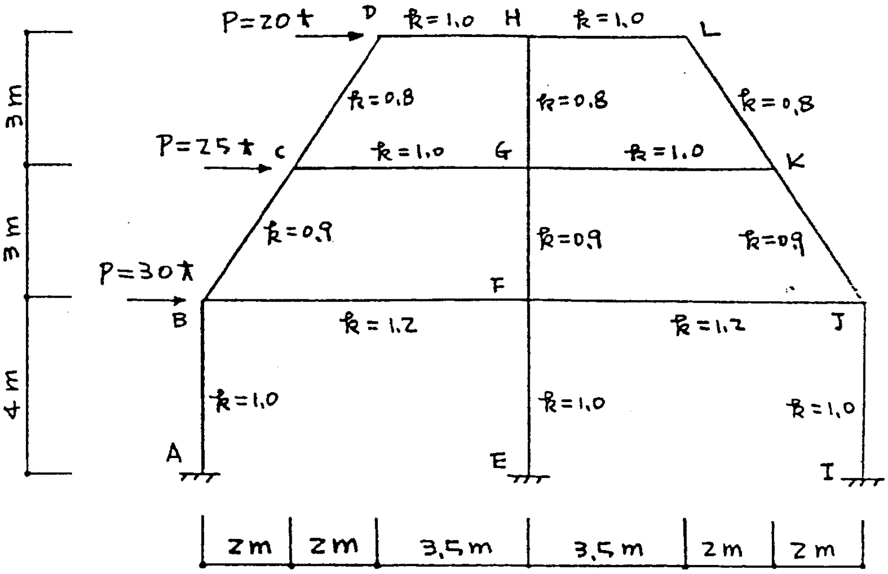
図－7・38

（問題 7・2）　図の階段梁の曲げモーメント図を求めよ。



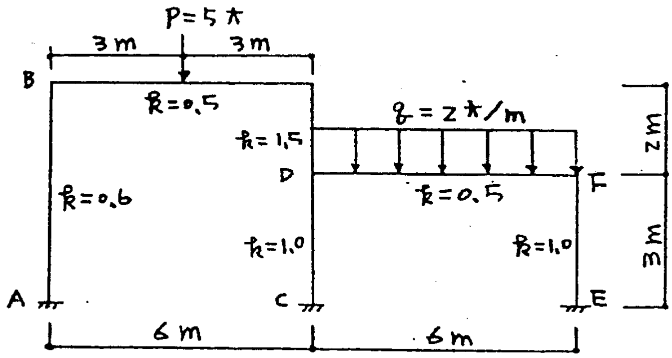
図－7・39

（問題 7・3） 図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



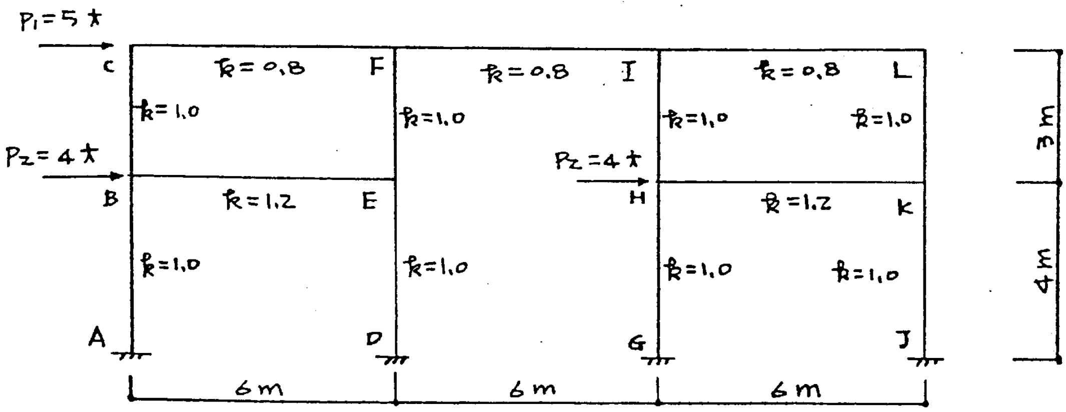
図－7・40

（問題 7・4） 図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



図－7・41

（問題 7・5） 図のラーメンの曲げモーメント図を求めよ。



図－7・42

<参考図書>

「構造力学」：二見秀雄：市ヶ谷出版社

「撓角法理論とその応用」：鷹部屋福平：工学図書株式会社

「建築構造力学」：斉藤謙次：理工図書

「異形ラーメンと固定モーメント法」：松本崇：理工図書

「改訂材料力学要論」：S・ティモシェンコ，D・H・ヤング，
前澤誠一郎訳：理工図書

「応用力学演習・下巻」：杉本禮三：森北出版

「撓角法」：小野薫著，田中尚補遺：紀元社出版株式会社

「応用力学演習問題解析法」：西村敏雄：理工図書